Devoir non surveillé
Éléments de solutions

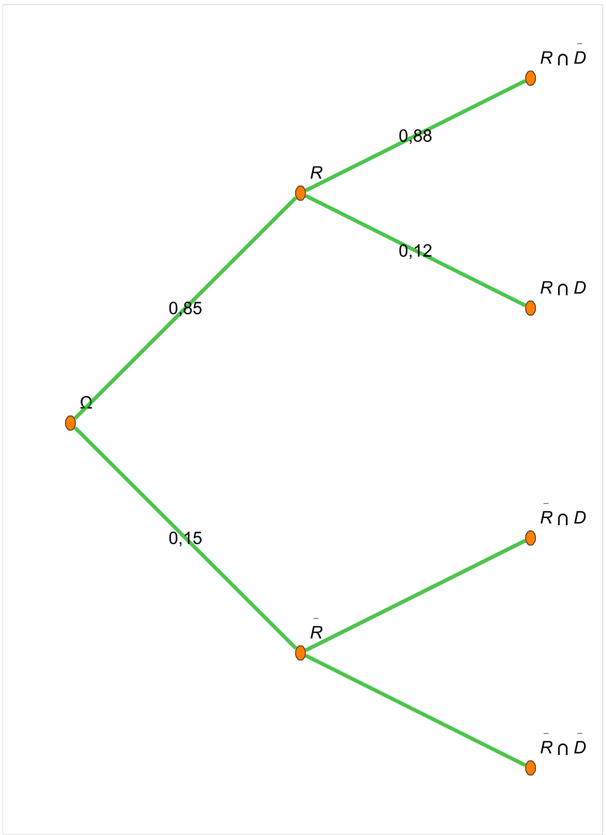
Exercice 1

1. On a:

- 85% des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle: on en déduit que $p(R) = \dfrac{85}{100} = 0,85$;
- 20% des dossiers entraînent des frais de dommages corporels donc $p(D) = \dfrac{20}{100} = 0,2$;
- Parmi les dossiers entraînant des frais de réparation matérielle, 12% entraînent aussi des frais de dommages

corporels; donc $p_R(D) = \dfrac{12}{100} = 0,12$.

2. On a l'arbre de probabilités:



a. L'événement "le dossier entraîne des frais de réparations matérielles et des frais de dommages corporels" est l'événement $R \cap D$.
On a donc $p(R \cap D) = p(R)\, p_R(D) = 0,85 \times 0,12 = 0,102$.

b. L'événement "le dossier entraîne seulement des frais de réparation matérielle" est l'événement $R \cap \overline{D}$.

Alors $p\left(R \cap \overline{D}\right) = p(R)\, p_R(\overline{D})$.

Or on sait que $p_R(D) + p_R(\overline{D}) = 1$ donc comme $p_R(D) = 0,12$, on en déduit $p_R(\overline{D}) = 1 - 0,12 = 0,88$.

Par suite $p\left(R \cap \overline{D}\right) = 0,85 \times 0,88 = 0,748$.

c. L'événement "le dossier entraîne seulement des frais de dommages corporels" est l'événement $\overline{R} \cap D$.

Remarquons que les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers, donc $p(D) = p(R \cap D) + p\left(\overline{R} \cap D\right)$.

Or on sait que $p(D) = 0,20$ et que $p(R \cap D) = 0,102$ donc $p\left(\overline{R} \cap D\right) = p(D) - p(R \cap D) = 0,20 - 0,102 = 0,098$.

d. L'événement “le dossier n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels” est l'événement $\overline{R} \cap \overline{D}$.

Remarquons que $\overline{\overline{R} \cap \overline{D}} = R \cup D = (R \cap D) \cup \left(R \cap \overline{D}\right) \cup \left(\overline{R} \cap D\right)$.

Ces 3 événements sont disjoints donc on en déduit $p\left(\overline{R} \cap \overline{D}\right) = 1 - p(R \cup D) = 1 - \left(p\left((R \cap D) + p\left(R \cap \overline{D}\right) + p\left(\overline{R} \cap D\right)\right)\right.$

d'où $p\left(\overline{R} \cap \overline{D}\right) = 0,052$.

e. La probabilité de l'événement “le dossier entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels” est la probabilité $p_D(R)$.

On sait que $p_D(R) = \dfrac{p(D \cap R)}{p(D)}$ donc $p_D(R) = \dfrac{0,102}{0,2} = 0,51$.

3. Notons E l'événement “le dossier choisi correspond à un excès de vitesse” et D l'événement “le dossier choisi entraîne des frais de dommages corporels”.

a. On cherche à déterminer la probabilité de l'événement $E \cap D$.
On a donc $p(E \cap D) = p(E)\, p_E(D)$.
Or on sait que 40% des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse donc $p(E) = 0,4$ et parmi ces dossiers 60% entraînent des frais de dommages corporels donc $p_E(D) = 0,6$.
Par suite $p(E \cap D) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.

b. Chaque dossier a la probabilité 0,24 d'être un dossier qui corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels et donc la probabilité $1 - 0,24 = 0,76$ d'être un dossier qui ne corresponde pas à un excès de vitesse entraînant des frais de dommages corporels.
Remarquons alors que l'événement “au moins un dossier parmi les cinq choisis corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels” est l'événement complémentaire de “aucun dossier parmi les cinq choisis correspond à un excès de vitesse entraînant des frais de dommages corporels”.
Par suite comme les dossiers sont choisis de manière indépendante, on obtient que
p("aucun dossier parmi les cinq choisis correspond à un excès de vitesse entraînant des frais de dommages corporels") = $(1 - 0,24)^5$

et ainsi p("au moins un dossier parmi les cinq choisis corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels") $= 1 - (1 - 0,24)^5$ d'où

p("au moins un dossier parmi les cinq choisis corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels") $\approx 0,746$.

Exercice 2

1. On sait que les nombres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r; alors:
$p_2 = p_1 + r$; $p_3 = p_2 + r = p_1 + 2r$; $p_4 = p_1 + 3r$; $p_5 = p_1 + 4r$; $p_6 = p_1 + 5r$.
Or on sait aussi que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.
On en déduit que $p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r + p_1 + 4r + p_1 + 5r = 1$ d'où $6p_1 + 15r = 1$.
D'autre part on sait que nombres $p_1,\ p_2,\ p_4$, dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique donc on sait qu'il existe un réel q tel que $p_2 = q\,p_1$ et $p_4 = q^2\,p_1$.
On en déduit donc que $p_1 + r = q\,p_1$ d'où $r = (q-1)\,p_1$ puis $p_1 + 3r = q^2\,p_1$ d'où $3r = \left(q^2 - 1\right)p_1 = (q-1)(q+1)\,p_1$.
On obtient donc que $3(q-1)\,p_1 = (q-1)(q+1)\,p_1$ et finalement $3 = q + 1$ d'où $q = 2$.
En effet, on ne peut avoir:
- $q = 1$ sinon $p_2 = p_1$ d'où comme de plus $p_2 = p_1 + 2r$, alors $r = 0$ et donc $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ et donc les faces seraient équiprobables. Ainsi $q - 1 \neq 0$;
- $p_1 = 0$ sinon $p_1 = p_2 = p_4 = 0$ et $r = \dfrac{1}{15}$ d'où $p_2 = 0 + \dfrac{1}{15} \neq 0$: absurde.

Ainsi on a $p_1 + r = 2\,p_1$ d'où $r = p_1$.

Alors on obtient $6\,p_1 + 15\,p_1 = 1$ d'où $p_1 = \frac{1}{21}$.

On en déduit

$p_2 = \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{2}{21}$; $p_3 = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} = \frac{3}{21}$; $p_4 = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} = \frac{4}{21}$; $p_5 = \frac{1}{21} + \frac{4}{21} = \frac{5}{21}$; $p_6 = \frac{1}{21} + \frac{5}{21} = \frac{6}{21}$.

Finalement on a bien montré que $p_k = \frac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \le k \le 6$.

2.a. On a:

• L'événement A : "le nombre obtenu est pair" est la réunion des événements incompatibles "le nombre obtenu est 2", "le nombre obtenu est 4" et "le nombre obtenu est 6".

Alors $p(A) = p_2 + p_4 + p_6$ donc $p(A) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

• L'événement B : "le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3" est la réunion des événements incompatibles "le nombre obtenu est 3", "le nombre obtenu est 4", "le nombre obtenu est 5" et "le nombre obtenu est 6".

On a donc $p(B) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6$ donc $p(A) = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$.

• L'événement C : "le nombre obtenu est 3 ou 4" est la réunion des événements incompatibles "le nombre obtenu est 3" et "le nombre obtenu est 4".

On a donc $p(C) = p_3 + p_4$ donc $p(C) = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

b. La probabilité cherchée est $p_A(B)$. On sait que $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Or l'événement $A \cap B$, c'est à dire "le nombre obtenu est pair et supérieur ou égal à 3" est la réunion des événements incompatibles "le nombre obtenu est 4" et "le nombre obtenu est 6".

Donc $p(A \cap B) = p_4 + p_6 = \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{10}{21}$. Rappelons que $p(A) = \frac{4}{7}$.

Ainsi on en déduit $p_A(B) = \frac{\frac{10}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{5}{6}$.

c. Pour les événements A et B :

On a $p_A(B) = \frac{5}{6}$ et $p(B) = \frac{6}{7}$ donc $p_A(B) \neq p(B)$: les événements A et B ne sont donc pas indépendants.

Pour les événements A et C :

On a $p(A) \times p(C) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21}$. D'autre part $p(A \cap C) = p_4 = \frac{4}{21}$.

Ainsi $p(A \cap C) = p(A) \times p(C)$ et donc les événements A et C sont indépendants.

3.a. On a $p(G \cap A) = p(A) \times p_A(G)$.

Or $p(A) = \frac{4}{7}$ et comme A est l'événement "le nombre obtenu est pair", alors le joueur gagne, sachant que l'événement A est réalisé s'il tire la boule blanche parmi les 4 boules de l'urne U_1.

Ainsi $p_A(G) = \frac{1}{4}$. On obtient finalement $p(G \cap A) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{7}$.

Ensuite comme les événements "le nombre obtenu est pair" et 'le nombre obtenu est impair" sont des événements incompatibles, on sait que $p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap \overline{A})$.

Calculons $p(G \cap \overline{A})$.

On a $p(G \cap \overline{A}) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(G) = (1 - p(A)) \times p(\text{" tirer une boule blanche dans } l' \text{ urne } U_2 \text{"}) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{7}$.

Finalement, on obtient donc $p(G) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$.

b. On veut déterminer $p_G(A)$. On sait que $p_G(A) = \dfrac{p(G \cap A)}{p(G)}$.

Par suite $p_G(A) = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 3:

Partie A

1. On note B_1, l'événement « tirer une boule blanche au 1er tirage » et B_2, l'événement « tirer une boule blanche au 2e tirage ».

L'événement « tirer une boule noire au i^e tirage » est donc $\overline{B_i}$ pour $i = 1$ ou $i = 2$.
On note G l'événement « la partie est gagnée ».

On a alors $G = \left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) \cup \left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$ et comme les événements B_1 et $\overline{B_1}$ sont incompatibles, d'après la formule des probabilités totales on obtient $p(G) = p\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = p(B_1)\, p_{B_1}(\overline{B_2}) + p(\overline{B_1})\, p_{\overline{B_1}}(B_2)$.

Comme il y a 3 blanches et 7 noires dans l'urne, on a $p(B_1) = \dfrac{3}{10}$ et $p(\overline{B_1}) = \dfrac{7}{10}$.

Ensuite comme les tirages sont avec remise, on a $p_{B_1}(\overline{B_2}) = p(B_1) = \dfrac{3}{10}$ et $p_{\overline{B_1}}(B_2) = p(B_2) = \dfrac{7}{10}$.

Finalement, $p(G) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{42}{100} = 0,42$.

2.a. L'expérience aléatoire à jouer au jeu est une expérience aléatoire à 2 issues dont la probabilité de succès « gagner au jeu » est égale à $p = 0,42$.
L'expérience aléatoire qui consiste à répéter cette expérience à 2 issues, n fois identiquement et de manière indépendante est donc un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0,42$.
La variable aléatoire X qui dénombre le nombre de parties gagnées parmi les n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.

b. p_n est la probabilité de l'événement « au moins une partie est gagnée parmi les n », c'est à dire de l'événement $(X \geq 1)$.

On a donc $p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$ puisque $(X = 0) = \overline{(X \geq 1)}$.

Or $p(X = 0) = \dbinom{n}{0} 0,42^0 \times (1 - 0,42)^{n-0} = 0,58^n$ d'où $p_n = 1 - 0,58^n$.

Pour $n = 10$, $p_{10} = 1 - 0,58^{10} \approx 0,9956$ d'où $p_{10} = 0,996$ arrondie au millième.

c. On cherche l'entier n tel que $p_n \geq 0,99$ donc il faut $1 - 0,58^n \geq 0,99$ d'où $0,58^n \leq 0,01$ et donc $n \ln(0,58) \leq \ln(0,01)$.

Alors comme $\ln(0,58) < 0$ car $0 < 0,58 < 1$, on obtient $n \geq \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)}$ donc $n \geq 8,45$ et finalement $n \geq 9$.

Il faut jouer au moins 9 parties pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99.

Partie B

1.a. L'événement $(Y_k = 5)$ = « tirer 2 boules de couleurs différentes » $= \left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) \cup \left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$ avec les notations de la partie **A**.

Par suite $p(Y_k = 5) = p\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = p(B_1)\, p_{B_1}(\overline{B_2}) + p(\overline{B_1})\, p_{\overline{B_1}}(B_2)$.

Comme il y a 3 blanches et k noires donc $p(B_1) = \dfrac{3}{k+3}$ et $p(\overline{B_1}) = \dfrac{k}{k+3}$

Or les tirages sont avec remise donc $p_{B_1}(\overline{B_2}) = p(B_1) = \dfrac{3}{k+3}$ et $p_{\overline{B_1}}(B_2) = p(B_2) = \dfrac{k}{k+3}$.

Finalement $p(Y_k = 5) = \dfrac{3}{k+3} \times \dfrac{k}{k+3} + \dfrac{k}{k+3} \times \dfrac{3}{k+3} = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

b. La variable Y_k prend les valeurs -9; -1 et 5.

On a vu que $p(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

On a $p(Y_k = -9) = p(B_1 \cap B_2) = \left(\dfrac{3}{k+3}\right)^2 = \dfrac{9}{(k+3)^2}$ et $p(Y_k = -1) = p\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \left(\dfrac{k}{k+3}\right)^2 = \dfrac{k^2}{(k+3)^2}$.

D'où la loi de probabilité pour Y_k:

Y_k	-9	-1	5
p_{Y_k}	$\dfrac{9}{(k+3)^2}$	$\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$	$\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

2. On a $E(Y_k) = -9 \times \dfrac{9}{(k+3)^2} - 1 \times \dfrac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \dfrac{6k}{(k+3)^2} = \dfrac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2}$.

Alors comme $(k+3)^2 > 0$ pour tout entier naturel k, $E(Y_k) > 0$ si et seulement si $-k^2 + 30k - 81 > 0$.
Or le trinôme du second degré $-k^2 + 30k - 81$ admet pour discriminant
$\Delta = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-81) = 900 - 324 = 576 = 24^2 > 0$.

Il admet donc 2 racines $k_1 = \dfrac{-30 - 24}{2 \times (-1)} = 27 > 0$ et $k_2 = 3 > 0$.

De plus comme le coefficient des termes au carré est $-1 < 0$, on sait que $-k^2 + 30k - 81 > 0$ pour $k \in]3; 27[$.
Par suite, le jeu est favorable pour le joueur si et seulement si k est un entier appartenant à l'intervalle $[4; 26]$.

Exercice 4

Partie A

1. On note B_1, l'événement « tirer une boule blanche au 1er tirage » et B_2, l'événement « tirer une boule blanche au 2e tirage ».

L'événement « tirer une boule noire au i^e tirage » est donc $\overline{B_i}$ pour $i = 1$ ou $i = 2$.
On note G l'événement « la partie est gagnée ».

On a alors $G = \left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) \cup \left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$ et comme les événements B_1 et $\overline{B_1}$ sont incompatibles, d'après la formule des probabilités totales on obtient $p(G) = p\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = p(B_1)\, p_{B_1}(\overline{B_2}) + p(\overline{B_1})\, p_{\overline{B_1}}(B_2)$.

Comme il y a 3 blanches et 7 noires dans l'urne, on a $p(B_1) = \dfrac{3}{10}$ et $p(\overline{B_1}) = \dfrac{7}{10}$.

Ensuite comme les tirages sont avec remise, on a $p_{B_1}(\overline{B_2}) = p(\overline{B_1}) = \dfrac{3}{10}$ et $p_{\overline{B_1}}(B_2) = p(B_2) = \dfrac{7}{10}$.

Finalement, $p(G) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{42}{100} = 0,42$.

2.a. L'expérience aléatoire à jouer au jeu est une expérience aléatoire à 2 issues dont la probabilité de succès « gagner au jeu » est égale à $p = 0,42$.
L'expérience aléatoire qui consiste à répéter cette expérience à 2 issues, n fois identiquement et de manière indépendante est donc un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0,42$.
La variable aléatoire X qui dénombre le nombre de parties gagnées parmi les n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.

b. p_n est la probabilité de l'événement « au moins une partie est gagnée parmi les n », c'est à dire de l'événement $(X \geq 1)$.

On a donc $p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$ puisque $(X = 0) = \overline{(X \geq 1)}$.

Or $p(X = 0) = \dbinom{n}{0} 0,42^0 \times (1 - 0,42)^{n-0} = 0,58^n$ d'où $p_n = 1 - 0,58^n$.

Pour $n = 10$, $p_{10} = 1 - 0,58^{10} \approx 0,9956$ d'où $p_{10} = 0,996$ arrondie au millième.

c. On cherche l'entier n tel que $p_n \geq 0,99$ donc il faut $1 - 0,58^n \geq 0,99$ d'où $0,58^n \leq 0,01$.
Or $0,58^8 \approx 0,012 > 0,01$ et $0,58^9 \approx 0,007 < 0,01$ donc il faut $n \geq 9$.

Partie B

1.a. L'événement $(Y_k = 5)$ = « tirer 2 boules de couleurs différentes » $= \left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) \cup \left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$ avec les notations de la partie **A**.

Par suite $p(Y_k = 5) = p\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = p(B_1)\, p_{B_1}(\overline{B_2}) + p(\overline{B_1})\, p_{\overline{B_1}}(B_2)$.

Comme il y a 3 blanches et k noires donc $p(B_1) = \dfrac{3}{k+3}$ et $p(\overline{B_1}) = \dfrac{k}{k+3}$

Or les tirages sont avec remise donc $p_{B_1}(\overline{B_2}) = p(B_1) = \dfrac{3}{k+3}$ et $p_{\overline{B_1}}(B_2) = p(B_2) = \dfrac{k}{k+3}$.

Finalement $p(Y_k = 5) = \dfrac{3}{k+3} \times \dfrac{k}{k+3} + \dfrac{k}{k+3} \times \dfrac{3}{k+3} = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

b. La variable Y_k prend les valeurs -9; -1 et 5.

On a vu que $p(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

On a $p(Y_k = -9) = p(B_1 \cap B_2) = \left(\dfrac{3}{k+3}\right)^2 = \dfrac{9}{(k+3)^2}$ et $p(Y_k = -1) = p\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \left(\dfrac{k}{k+3}\right)^2 = \dfrac{k^2}{(k+3)^2}$.

D'où la loi de probabilité pour Y_k:

Y_k	-9	-1	5
p_{Y_k}	$\dfrac{9}{(k+3)^2}$	$\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$	$\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

2. On a $E(Y_k) = -9 \times \dfrac{9}{(k+3)^2} - 1 \times \dfrac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \dfrac{6k}{(k+3)^2} = \dfrac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2}$.

Alors comme $(k+3)^2 > 0$ pour tout entier naturel k, $E(Y_k) > 0$ si et seulement si $-k^2 + 30k - 81 > 0$.
Or le trinôme du second degré $-k^2 + 30k - 81$ admet pour discriminant
$\Delta = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-81) = 900 - 324 = 576 = 24^2 > 0$.

Il admet donc 2 racines $k_1 = \dfrac{-30 - 24}{2 \times (-1)} = 27 > 0$ et $k_2 = 3 > 0$.

De plus comme le coefficient des termes au carré est $-1 < 0$, on sait que $-k^2 + 30k - 81 > 0$ pour $k \in]3; 27[$.
Par suite, le jeu est favorable pour le joueur si et seulement si k est un entier appartenant à l'intervalle $[4; 26]$.