Devoir non surveillé

Mathématiques, Série S

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Exercice 1

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ces dossiers d'accidents de la circulation.

• 85% des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.

• 20% des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.

• Parmi les dossiers entraînant des frais de réparation matérielle, 12% entraînent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les événements suivants:

R: « le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle »

D: « le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels ».

On pourra s'aider d'un arbre.

1. En utilisant les notations R et D, exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilités.
Les résultats seront donnés sous forme décimale.

2. Calculer la probabilité pour qu'un dossier:

a. entraîne des frais de réparations matérielles et des frais de dommages corporels;

b. entraîne seulement des frais de réparation matérielle;

c. entraîne seulement des frais de dommages corporels;

d. n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels;

e. entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.

3. On constate que 40% des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et parmi ces dossiers 60% entraînent des frais de dommages corporels.

a. On choisit un dossier. Quelle est la probabilité pour que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?

b. On choisit cinq dossiers de façon indépendante. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?

Exercice 2:

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leq k \leq 6$) .
Ce dé est pipé de telle sorte que:
• les six faces ne sont pas équiprobables,
• les nombres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r;
• les nombres $p_1,\ p_2,\ p_4$, dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1). Démontrer que: $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.

On pourra utiliser ce résultat dans les questions suivantes, même si on ne l'a pas démontré.

• C : "le nombre obtenu est 3 ou 4 .

a). Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

b). Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c). Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

3). On utilise ce dé pour un jeu. On dispose:
• d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires ;
• d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire .
Le joueur lance le dé:
• s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1;
• s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2 .
On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet événement.

a). Déterminer la probabilité de l'événement $G \cap A$, puis la probabilité de l'événement G.

b). Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il est obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

Exercice 3:

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard et avec remise deux boules dans cette urne.
On établit la règle du jeu suivante:
– un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche.;
– un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire;
– un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie **A** , on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est à dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.
Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$.
Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie **B**, le nombre k est un entier supérieur ou égal à 2. Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1.a. Justifier l'égalité: $p(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k.On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.