Travail autonome

Mathématiques, Série S

Exercice 1:

Les deux parties* A *et* B *peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront données sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes:
– la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test);
– la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).
On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement «la personne est contaminée par le virus» et T l'événement «le test positif».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $p(V)$, $p_V(T)$ et $p_{\overline{V}}(\overline{T})$. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. **a.** Justifier par un calcul la phrase:
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de «chances» que la personne soit contaminée ».

b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminé par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

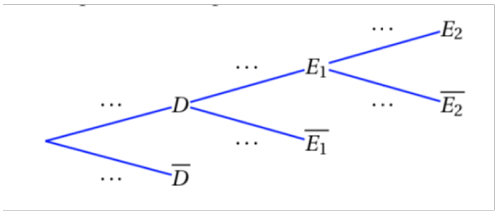
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 2:

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat. On considère les événements suivants :
   – D: « Le candidat est retenu sur dossier »,
   – E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   – E_2 : « Le candidat est recruté ».

   a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   b. Calculer la probabilité de l'événement E_1

   c. On note F l'événement « Le candidat n'est pas recruté ». Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

   b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recru- tés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999?

Exercice 3

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.
On définit les événements suivants:
– A: «le jardinier a choisi le lot 1»
– B: «le jardinier a choisi le lot 2»
– J_n: «le jardinier obtient n tulipes jaunes».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles.

a. Montrer que: $p_B(J_n) = \binom{50}{n} 2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que J_n est réalisé. Établir que

$p_n = \dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$.

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0,9$? Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 4

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.
Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets.
On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.
Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.
Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ième trajet et la valeur 0 sinon.
Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie, on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.

a. Calculer l'espérance mathématique de X.

b. Calculer les probabilités $p(X = 0)$, $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
Justifier l'égalité $Z = 400 - 100\,X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.

4. On désire déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.

a. Démontrer que $p(X \leq 2) = (1 - p)^{38}\left(741\,p^2 + 38\,p + 1\right)$.

b. Soit f la fonction définie sur [0; 1] par: $f(x) = (1 - x)^{38}\left(741\,x^2 + 38\,x + 1\right)$.
Montrer que f est strictement décroissante sur [0; 1] et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle [0; 1] tel que $f(x_0) = 0,01$.
Déterminer l'entier naturel n tel que $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.

c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99%. On exprimera p en fonction de x_0.

©2017