

Travail autonome n°4

Éléments de solutions

Exercice 1:

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g .

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $g'(x) = e^x - 1$.

Alors $g'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$.

Finalement $g'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $g'(x) < 0$ pour $x < 0$
Donc g est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

On remarque que $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

La fonction g est décroissante sur $] -\infty; 0]$ donc pour tout réel $x < 0$, $g(x) > g(0)$ d'où $g(x) > 0$.

La fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$ donc pour tout réel $x > 0$, $g(x) > g(0)$ d'où $g(x) > 0$.

Finalement $g(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ d'où $g(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire que pour tout réel x de $[0; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

On a montré que pour tout réel x , $g(x) \geq 0$ d'où $e^x - x - 1 \geq 0$ et donc $e^x - x \geq 1 > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

On a: $f(0) = \frac{e^0 - 1}{e^0 - 0} = \frac{0}{1} = 0$ et $f(1) = \frac{e^1 - 1}{e^1 - 1} = 1$.

On sait que la fonction f est croissante sur $[0; 1]$ donc $0 \leq x \leq 1 \implies f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ d'où $0 \leq f(x) \leq 1$.

Par suite pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

Remarque: (avec des inégalités)

Pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq -x \leq 0$ d'où $e^x - 1 \leq e^x - x$.

D'autre part nous avons montré que $e^x - x > 0$ donc on obtient finalement $\frac{e^x - 1}{e^x - x} \leq \frac{e^x - x}{e^x - x}$ et finalement $f(x) \leq 1$.

De plus comme $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ et donc $e^x - 1 \geq 0$ d'où comme $e^x - x \geq 0$, $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \geq 0$.

Finalement, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

Soit $x \in [0; 1]$, alors:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \\ f(x) - x &= \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} \\ f(x) - x &= \frac{e^x(1-x) - (1-x^2)}{e^x - x} \\ f(x) - x &= \frac{e^x(1-x) - (1-x)(1+x)}{e^x - x} \\ f(x) - x &= \frac{(1-x)(e^x - (1+x))}{e^x - x} \\ f(x) - x &= \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x} \end{aligned}$$

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$.

On étudie le signe de $f(x) - x$.

On a montré à la **partie A** que $g(x) \geq 0$ et que $e^x - x \geq 0$ pour tout réel x donc en particulier pour $x \in [0; 1]$.

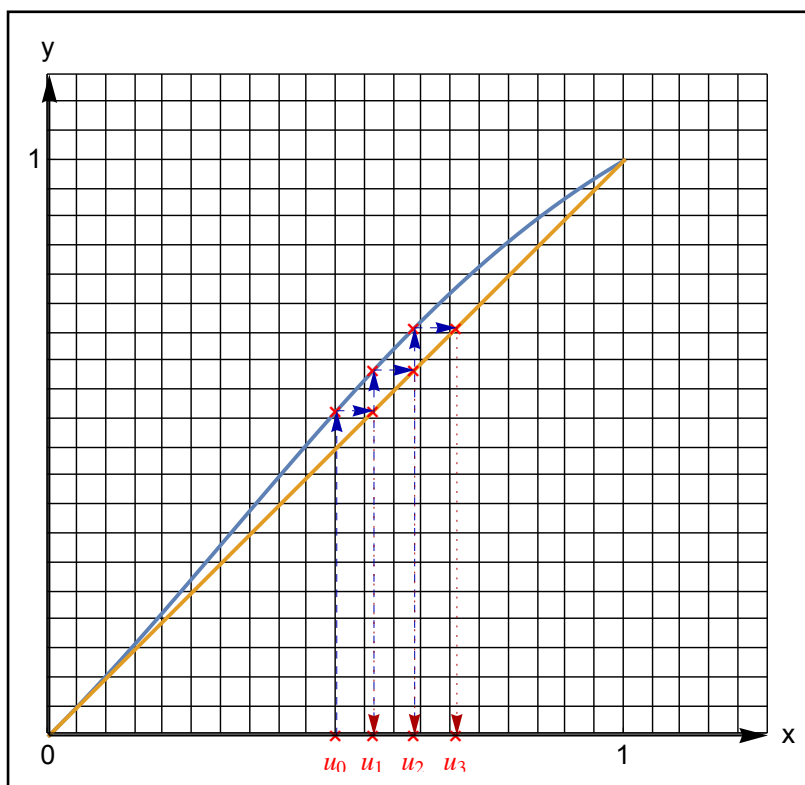
Par suite $\frac{g(x)}{e^x - x} \geq 0$ pour tout réel $x \in [0; 1]$ et donc $f(x) - x$ est du signe de $1 - x$ sur $[0; 1]$.

Or pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq 1 - x \leq 1$ donc $f(x) - x \geq 0$ et ainsi on en déduit que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $[0; 1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}.$$

1. Construire sur l'axe des abscisses, les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.



2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

On raisonne par récurrence sur n .

On définit pour n entier naturel, la proposition $\mathcal{P}_n$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

$$\text{On a } u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{e^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{2(\sqrt{e} - 1)}{2\sqrt{e} + 1} \approx 0.786.$$

Par suite $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Soit n un entier.

On fait l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a donc $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Comme $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et que la fonction f est croissante sur $[0; 1]$, alors on en déduit :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$$

Finalement $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = 1$.

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc héréditaire.

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire pour $n \geq 0$, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

D'après la question précédente :

- pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$: la suite (u_n) est donc bornée ;
- pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est donc croissante.

D'après le théorème de convergence monotone, on peut donc affirmer que la suite (u_n) est convergente.

On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et comme la fonction f est continue sur $[0; 1]$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(\ell)$

Finalement, comme pour tout entier naturel n $u_{n+1} = f(u_n)$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$ et donc $\ell = f(\ell)$.

La limite ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$ c'est à dire de l'équation $f(x) - x = 0$.

On résout donc $f(x) - x = 0$ c'est à dire $\frac{(1-x)g(x)}{e^x - x} = 0$.

Comme $e^x - x > 0$ pour $x \in [0; 1]$, alors il faut $1 - x = 0$ d'où $x = 1$ ou $g(x) = 0$ d'où $x = 0$ (Cf partie A).

Par conséquent $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

Or $\ell \geq \frac{1}{2}$ puisque pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et donc $\frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 1$.

Finalement $\ell = 1$.

Exercice 2:

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

On remarque que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

La fonction g est une somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est elle même continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto e^{2x}$ est de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$ et admet donc une dérivée de la forme $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$.

On obtient alors pour tout réel x :

$$g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1.$$

Par ailleurs, on développe : $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^x e^x + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1 = g'(x)$.

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

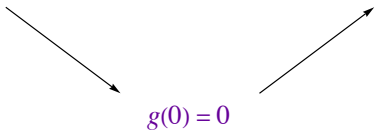
Pour tout réel x , on a $e^x > 0$ donc par produit par le nombre positif 2, on a $2e^x > 0$ puis par somme : $2e^x + 1 > 1 > 0$

La dérivée $g'(x)$ est donc du signe de $(e^x - 1)$.

Or, on a : $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Ainsi, on a :

- pour tout réel $x > 0$, $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- pour tout réel $x < 0$, $g'(x) < 0$ donc g est décroissante sur l'intervalle $] - \infty; 0[$.
- $g'(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$		+	
Variations de g			

La fonction g est donc décroissante sur $] - \infty; 0[$ puis croissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit qu'elle admet un minimum en 0.

Ce minimum est égal à : $g(0) = e^{2 \times 0} - e^0 - 0 = 0$.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Soit un entier naturel n .

On a alors : $u_{n+1} - u_n = (e^{2u_n} - e^{u_n}) - u_n = g(u_n)$.

La fonction g a un minimum égal à 0, donc on en déduit alors que $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

2. Dans cette question, on suppose que : $a \leq 0$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.

On définit la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : “ $u_n \leq 0$ ” pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

On a $u_0 = a \leq 0$, donc la propriété $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$.

On fait l'hypothèse de récurrence $P(k)$ est vraie, c'est à dire que : $u_k \leq 0$.

Or, par définition de u_{k+1} , on a : $u_{k+1} = e^{u_k}(e^{u_k} - 1)$

Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \leq 0$,

La fonction exp étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $e^{u_k} \leq e^0 = 1$.

Donc on en déduit que $e^{u_k} - 1 \leq 0$ et finalement, comme $e^{u_k} > 0$, $e^{u_k}(e^{u_k} - 1) \leq 0$.

Soit $u_{k+1} \leq 0$

La propriété $P(k+1)$ est vraie. La propriété $P(k)$ est héréditaire.

Conclusion :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi on a pour tout entier n , $u_n \leq 0$.

b. Dédurre des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

On a ainsi montré que la suite (u_n) est croissante et majorée par 0, d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente vers une limite finie l .

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .

Lorsque $a = 0$, on a $u_0 = 0$ et donc $u_1 = 0$ etc ... On montre par récurrence que la suite (u_n) est constante et égale à 0. Sa limite est donc 0.

3. Dans cette question, on suppose que : $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

D'une part, on a montré que la suite (u_n) est croissante, donc on a :

$$u_0 = a \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots$$

Par ailleurs, $a > 0$ et la fonction g est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc on a :

$$g(u_0) = g(a) \leq g(u_1) \leq g(u_2) \leq \dots \leq g(u_n) \leq \dots$$

Soit un entier naturel n , alors on a : $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

On définit la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : “ $u_n \geq a + n \times g(a)$ ” pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

On a $u_0 = a$ et $a + 0 \times g(a) = a$ Donc la propriété $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$.

On fait l'hypothèse de récurrence $P(k)$ est vraie, c'est à dire que : $u_k \geq a + k \times g(a)$.

Or, d'après la question 1.c., on a : $u_{k+1} = u_k + g(u_k)$

Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \geq a + k \times g(a)$,

Donc on en déduit que $u_{k+1} = u_k + g(u_k) \geq a + k \times g(a) + g(u_k)$ et finalement, comme $g(u_k) > g(a)$, on obtient $u_{k+1} \geq a + k \times g(a) + g(u_k) \geq a + k \times g(a) + g(a) = a + (k + 1) \times g(a)$.

soit $u_{k+1} \geq a + (k + 1) \times g(a)$

La propriété $P(k + 1)$ est vraie.

La propriété $P(k)$ est héréditaire.

Conclusion :

La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi on a pour tout entier n , $u_n \geq a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

On sait que la fonction g atteint son minimum 0 en 0, donc $g(a) > 0$ (car $a \neq 0$).

Ainsi, par limite de référence, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Par produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times g(a) = +\infty$

Par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a + n \times g(a) = +\infty$

D'après le théorème de minoration, on en déduit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Sur la copie, recopier la partie " Traitement " en la complétant.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que $u - M \leq 0$ n prend la valeur $n + 1$ u prend la valeur $e^{2u} - e^u$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

centretrang2015()	"centretrang2015" stored successfully
Valeur de M ? 60	Define centretrang2015()=
n = 36	Prgm
	Local n,u,m
	u:=0.02
	n:=0
	Request "Valeur de M ?",m
	While u-m≤0
	n:=n+1
	u:=e ^{2·u} -e ^u
	EndWhile
	Disp "n = ",n
	EndPrgm
Done	

Ci-dessous, voici un extrait de la table des valeurs de n et des termes u_n :

29	0.128109
30	0.155357
31	0.196325
32	0.263977
33	0.393362
34	0.714234
35	2.12968
36	62.3527

En conclusion, l'algorithme affichera 36.

Exercice 3:

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x-1} + 1$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A: étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

$$\text{Pour tout réel } x, f(x) = x e^x e^{-1} + 1 = \frac{1}{e} x e^x + 1.$$

$$\text{Or on sait que } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e} x e^x + 1 = 1.$$

On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $-\infty$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ et que $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$.

On sait aussi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x-1} = +\infty$.

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque:

En utilisant la transformation de la question 1., on obtient par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$ et comme $\frac{1}{e} > 0$, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} x e^x + 1 = +\infty.$$

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

Remarquons que la fonction f est dérivable comme produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{x-1}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{x-1}$ elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction $x \mapsto x-1$ suivie de la fonction $x \mapsto e^x$ dérivables sur $\mathbb{R}$.

En utilisant la transformation de la première question, le produit est suffisant.

Pour tout réel x , on a $f'(x) = 1 \times e^{x-1} + x \times (1 \times e^{x-1}) + 0 = (x+1)e^{x-1}$.

Remarque: Avec $f(x) = \frac{1}{e} x e^x + 1$, on obtient $f'(x) = \frac{1}{e} (1 \times e^x + x \times e^x) = \frac{1}{e} e^x (x+1)$.

4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

On sait que pour tout réel x , $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

Or on sait que $e^a > 0$ pour tout réel a , donc comme pour tout réel x , $x-1 \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$.

Par suite $f'(x)$ est du signe de $x+1$.

Ainsi comme $x+1 > 0$ pour $x > -1$, on en déduit que $f'(x) > 0$ pour $x > -1$ et $f'(x) < 0$ pour $x < -1$.

Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$ et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$.

On obtient le tableau de variation pour f :

$$\text{On a } f(-1) = -1 \times e^{-1-1} + 1 = 1 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2}.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	1	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

Partie B: recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe C au point d'abscisse a qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à C au point d'abscisse a . Donner une équation de T_a .

Une équation de la tangente T_a est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a) = (a+1)e^{a-1}(x-a) + a e^{a-1} + 1$ d'où $y = (a+1)e^{a-1}x + 1 - a^2 e^{a-1}$.

2. Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité $1 - a^2 e^{a-1} = 0$.

On suppose $a > 0$.

On sait qu'une droite passe par l'origine du repère si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle.

Comme l'ordonnée à l'origine de T_a est $1 - a^2 e^{a-1}$, la tangente T_a passe par l'origine du repère si et seulement si $1 - a^2 e^{a-1} = 0$

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation $1 - x^2 e^{x-1} = 0$.

Remarquons tout d'abord que $1 - 1^2 e^{1-1} = 1 - 1 = 0$ donc 1 est bien solution de l'équation $1 - x^2 e^{x-1} = 0$ sur $]0; +\infty[$.

Montrons que c'est la seule.

La fonction $\varphi : x \mapsto 1 - x^2 e^{x-1}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a

$$\varphi'(x) = -2x e^{x-1} - x^2 e^{x-1} = -e^{x-1}(x^2 + 2x) = -e^{x-1}x(x+2).$$

Alors comme $x > 0$, $x > 0$, $x + 2 > 0$ d'où $x(x+2) > 0$.

De plus on sait que $e^{x-1} > 0$ pour tout réel x donc en particulier pour tout réel $x > 0$.

Par conséquent, $\varphi'(x) = -e^{x-1}x(x+2) < 0$ pour tout réel $x > 0$.

La fonction φ est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

De plus on a:

- $\varphi(0) = 1 - 0^2 e^{0-1} = 1 > 0$

- on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc on en déduit par produit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^2 e^{x-1} = -\infty$.

La fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ est à valeurs dans $] -\infty; 1]$.

Finalement, la fonction φ est continue sur $[0; +\infty[$ car dérivable sur $[0; +\infty[$, strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et à valeurs dans $] -\infty; 1]$.

Alors comme $0 \in] -\infty; 1]$, on sait que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ appartenant à $]0; +\infty[$.

Comme 1 est solution et $1 \in]0; +\infty[$, on a donc $\alpha = 1$. 1 est ainsi l'unique solution de l'équation $1 - x^2 e^{x-1} = 0$ sur $]0; +\infty[$.

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

L'équation de la tangente T_1 est donnée par $y = (1 + 1) e^{1-1} x = 2x$.

Partie C: courbe

1. Déterminer la position relative de la courbe C par rapport à sa tangente à l'origine.

La tangente au point d'abscisse 0 à la courbe C a pour équation $y = (0 + 1) e^{0-1} x + 1 = 0^2 \times e^{0-1} = \frac{1}{e} x + 1$ d'après la formule obtenue à la question **B.1**.

Étudions le signe de $f(x) - y = (x e^{x-1} + 1) - \left(\frac{1}{e} x + 1\right) = x e^{-1} e^x - \frac{1}{e} x = \frac{1}{e} x(e^x - 1)$.

On sait que $\frac{1}{e} > 0$ donc $\frac{1}{e} x$ est du signe de x sur $\mathbb{R}$.

De plus $e^x - 1 > 0$ si $e^x > 1$ donc si $x > 0$.

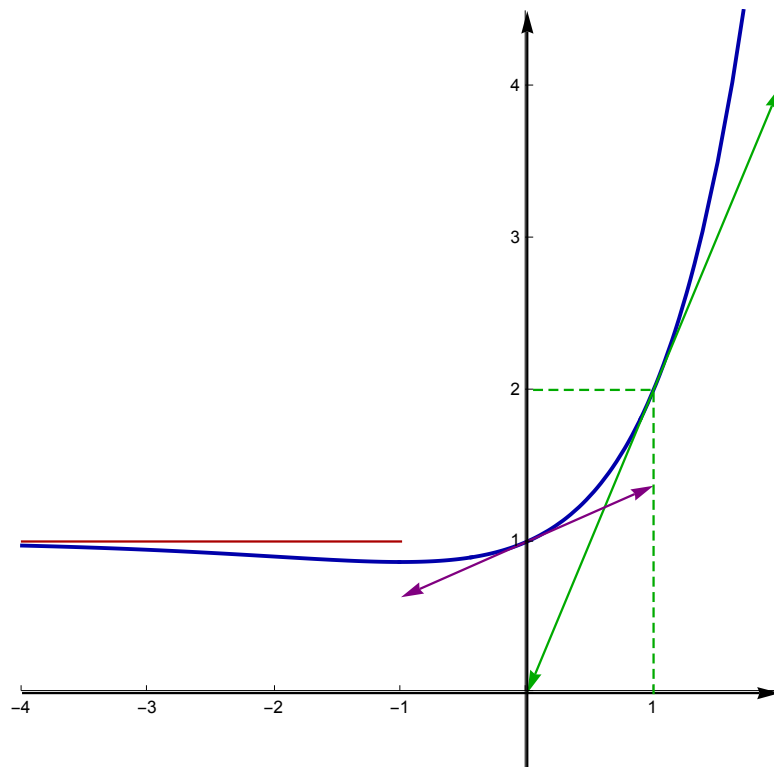
On en déduit que pour $x > 0$, $\frac{1}{e} x(e^x - 1) > 0$ et pour $x < 0$, $\frac{1}{e} x(e^x - 1) > 0$.

Finalement, $f(x) - y > 0$ pour $x \neq 0$ et $f(x) - y = 0$ pour $x = 0$.

Par suite la courbe C est au-dessus de sa tangente en 0 sur $\mathbb{R}$.

2. Représenter la courbe C dans le repère fourni en Annexe à l'aide des informations précédentes.

On obtient:



Exercice 4:

- Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle. Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe C_1 et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe C_2 .
- On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe C_1 et par B le point d'abscisse b de la courbe C_2 .

- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe C_1 au point A .

Une équation de la tangente (T_A) à (C_1) au point A d'abscisse a est : $y = e^a(x - a) + e^a$ c'est à dire $y = e^a x + e^a(1 - a)$.

- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe C_2 au point B .

Une équation de la tangente (T_B) à (C_2) au point B d'abscisse b est : $y = -2b(x - b) + (-b^2 - 1)$ c'est à dire $y = -2bx + (b^2 - 1)$.

- En déduire que les droites $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S):

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = b^2 - 1 \end{cases}$$

Les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si elles ont le même coefficient directeur et la même ordonnée à l'origine.

Par suite les réels a et b vérifient le système $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a(1 - a) = b^2 - 1 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = b^2 - 1 \end{cases}$ (S).

- Montrer que le système (S) est équivalent au système (S'): $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4a e^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$.

Le système (S) s'écrit $\begin{cases} b = \frac{e^a}{-2} \\ e^a - a e^a = \left(\frac{e^a}{-2}\right)^2 - 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = \frac{(e^a)^2}{4} - 1 \end{cases}$ puis $\begin{cases} e^a = -2b \\ 4e^a - 4a e^a = e^{2a} - 4 \end{cases}$ et donc

$$\text{finalement } \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E): e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $] - \infty; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

Pour tout réel $x \in] - \infty; 0[$, $2x < 0$ et ainsi $e^{2x} < 1$ donc $e^{2x} - 4 < 0$.

De plus pour tout réel $x \in] - \infty; 0[$, $e^x > 0$ et $x - 1 < -1 < 0$ donc $4e^x(x-1) < 0$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $] - \infty; 0[$.

Remarquons que pour tout réel x , $f(x) = (e^{2x} - 4) + 4e^x(x-1)$.

Ainsi comme pour tout réel $x \in] - \infty; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$ alors $(e^{2x} - 4) + 4e^x(x-1) < 0$ c'est à dire $f(x) < 0$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $] - \infty; 0[$.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^x(e^x + 2x)$.

Or pour tout réel x , $e^x > 0$ et pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $2x \geq 0$ donc $e^x + 2x > 0$ et finalement $2e^x(e^x + 2x) > 0$ d'où $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

On note a cette solution.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a .

$$\text{On a } f(0) = e^{2 \times 0} + 4 \times 0 \times e^0 - 4e^0 - 4 = 1 - 0 - 4 - 4 = -7 < 0.$$

$$\text{De plus, pour tout réel } x, f(x) = e^{2x} \left(1 + \frac{4x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4}{e^{2x}} \right).$$

$$\text{Or on sait que } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Ainsi par inverse et somme de limites comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et comme pour $x \neq 0$, $\frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ on en déduit donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4}{e^{2x}} \right) = 1 \text{ puis par produit de limites } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(1 + \frac{4x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4}{e^{2x}} \right) = +\infty.$$

$$\text{Finalement } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

On sait donc que f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

On sait aussi que $f(0) = -7 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$.

Par suite on peut en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Comme $f(0) = -7 < 0$ et $f(1) = e^2 - 4 > 0$ car $e > 2$ alors on peut assurer que $0 < a < 1$.

On obtient:

$$\bullet f(0,8) \approx -0,83 < 0 \text{ et } f(0,9) \approx 1,07 > 0 \text{ donc } 0,8 < a < 0,9.$$

$$\bullet f(0,84) \approx -0,12 < 0 \text{ et } f(0,85) \approx 0,07 > 0 \text{ donc } 0,84 < a < 0,85.$$

Un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a est donc $0,84 < a < 0,85$.

4. On prend pour A le point d'abscisse a .

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ sont confondues.

Comme a est l'unique réel vérifiant $e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0$, alors le réel b tel que les droites (T_A) et (T_B) sont confondues est donné par $b = -\frac{e^a}{2}$.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et comme $0,84 < a < 0,85$ alors $e^{0,84} < e^a < e^{0,85}$ donc $-\frac{e^{0,85}}{2} < b < -\frac{e^{0,84}}{2}$.

Or $-\frac{e^{0,85}}{2} \approx -1,17$ et $-\frac{e^{0,84}}{2} \approx -1,16$, on obtient qu'un encadrement d'amplitude 10^{-1} de b est $-1,2 < b < -1,1$.