

Travail autonome n°4

Mathématiques, Série S

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Bonnes recherches.*

Exercice 1:

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que pour tout réel x de $[0; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé est donnée en annexe. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

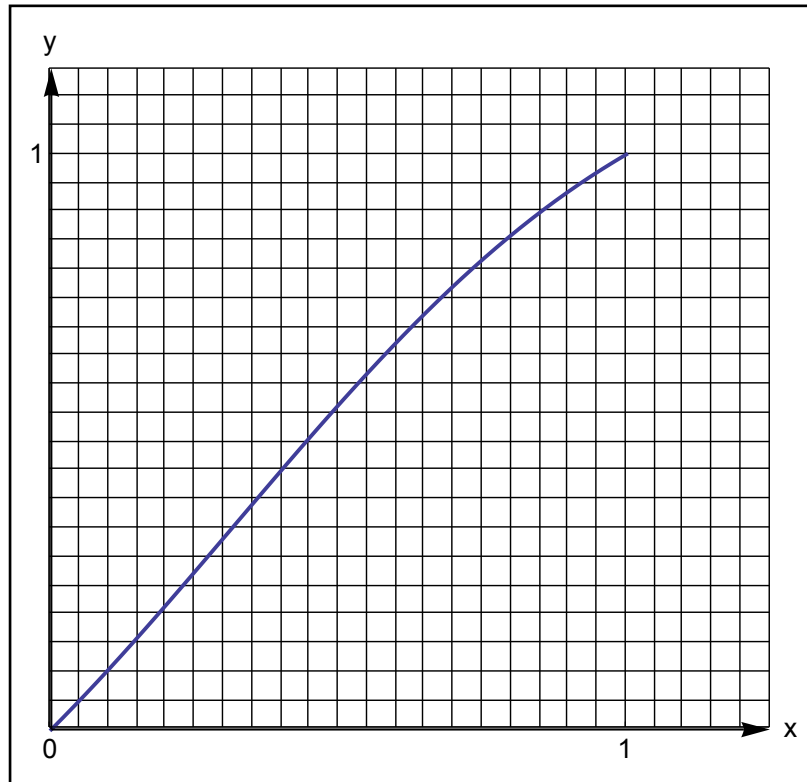
1. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
 - a. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$
.

1. Construire sur l'axe des abscisses, les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE:



Exercice 2:

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

On remarque que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.
 - a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
 - b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
 - c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Dans cette question, on suppose que : $a \leq 0$.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.
 - (((b. Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.)))
 - c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .
3. Dans cette question, on suppose que : $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
 - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet

algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Sur la copie, recopier la partie " Traitement " en la complétant.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Exercice 3

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x-1} + 1$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A: étude de la fonction

((1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?))

((2. Déterminer la limite de f en $+\infty$))

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x + 1) e^{x-1}$.

4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B: recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe C au point d'abscisse a qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à C au point d'abscisse a . Donner une équation de T_a .

2. Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité $1 - a^2 e^{a-1} = 0$.

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation $1 - x^2 e^{x-1} = 0$.

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Partie C: Courbe

1. Déterminer la position relative de la courbe C par rapport à sa tangente à l'origine.

2. Représenter la courbe C dans le repère fourni en **Annexe** à l'aide des informations précédentes.

Exercice 4:

On considère les deux courbes C_1 et C_2 d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente T commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'**annexe 2**, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.

Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe C_1 et l'abscisse du point de contact

de cette tangente avec la courbe C_2 .

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe C_1 et par B le point d'abscisse b de la courbe C_2 .

a. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe C_1 au point A .

b. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe C_2 au point B .

c. En déduire que les droites $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S):

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S'): $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4a e^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation (E): $e^{2x} + 4x e^x - 4e^x - 4 = 0$.

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = e^{2x} + 4x e^x - 4e^x - 4$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $] -\infty; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $] -\infty; 0[$.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

On note a cette solution.

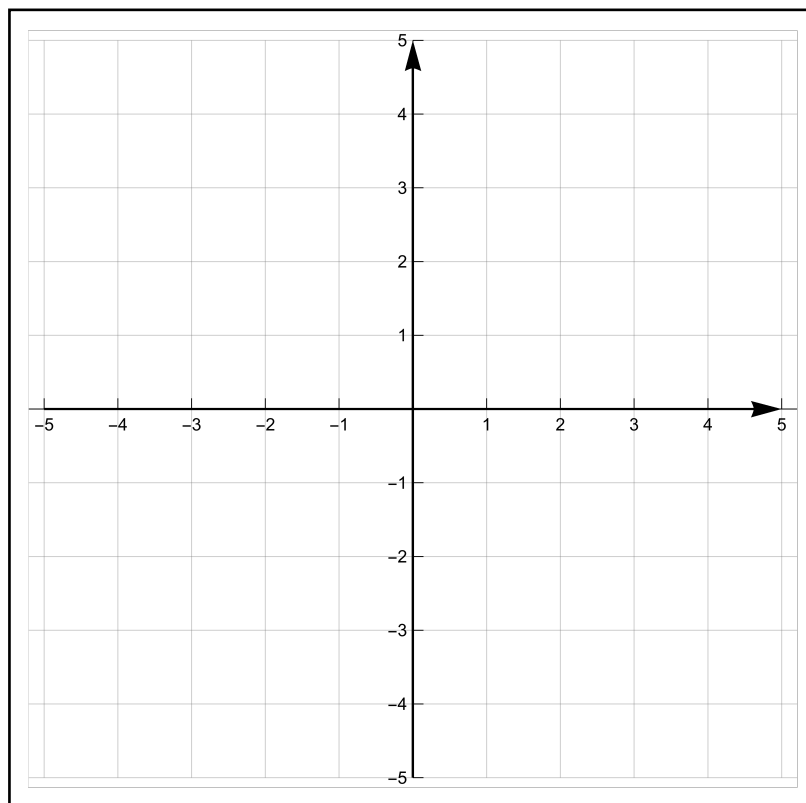
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a .

4. On prend pour A le point d'abscisse a .

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ sont confondues.

Annexe:

Annexe de l'exercice 4, à rendre avec la copie.



Correction