

## Travail autonome n°5

# Elements de solutions

## Mathématiques, Série S

**L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.**  
**Bonnes recherches.**

### Exercice 1:

#### 1. Restitution organisée des connaissances

**Pré-requis :**

- la fonction logarithme népérien est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sa fonction dérivée est la fonction inverse  $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ .
- $\ln(1) = 0$

Démontrer que pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $x$ ,  $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ .

Soit  $a \in ]0; +\infty[$ .

On pose  $\phi_a(x) = \ln(ax) - \ln(x)$  définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  puisque  $x \mapsto ax$  est définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  à valeurs dans  $]0; +\infty[$  et  $\ln$  est définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\phi_a'(x) = a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$ .

La fonction  $\phi_a$  est donc constante sur  $]0; +\infty[$ .

Ainsi pour tout réel  $x > 0$ ,  $\phi_a(x) = \phi_a(1)$ .

Or  $\phi_a(1) = \ln(a \times 1) - \ln(1) = \ln(a)$ .

Par suite pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln(ax) - \ln(x) = \ln(a)$  d'où  $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ .

Ainsi comme pour tout réel  $a > 0$ , pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ , pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $x$ ,  $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ .

**2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$  et que  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$  pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $b$ .**

- Soit  $b > 0$ , alors  $\frac{1}{b} > 0$ .

On a  $b \times \frac{1}{b} = 1$  d'où  $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(1) = 0$ .

D'après la propriété précédente, on a aussi  $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$ .

On en déduit donc  $\ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$  d'où  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ .

- Soit  $a > 0$  et  $b > 0$ . alors  $\frac{1}{b} > 0$ .

On a  $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$  donc d'après la propriété démontrée à la question 1.,  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$ .

Comme on vient de démontrer que  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ , on obtient finalement  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ .

**3. On donne  $0,69 \leq \ln(2) \leq 0,70$  et  $1,09 \leq \ln(3) \leq 1,10$ . En déduire des encadrements de  $\ln(6)$ ,  $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$  et  $\ln\left(\frac{3}{8}\right)$ .**

- Remarquons que  $6 = 2 \times 3$  avec  $2 > 0$  et  $3 > 0$ .  
 Ainsi on a  $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$ .

Alors comme  $0,69 \leq \ln(2) \leq 0,70$  et  $1,09 \leq \ln(3) \leq 1,10$ , on obtient donc  $0,69 + 1,09 \leq \ln(2) + \ln(3) \leq 0,70 + 1,10$  d'où  $1,78 \leq \ln(6) \leq 1,80$ .

• On sait que  $\ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln(6)$  et on vient de montrer que  $1,78 \leq \ln(6) \leq 1,80$  donc  $-1,80 \leq \ln\left(\frac{1}{6}\right) \leq -1,78$ .

• Remarquons que  $8 = 2^3$  donc  $\ln(8) = \ln(2) + \ln(2) + \ln(2) = 3 \ln(2)$ .  
Alors comme  $0,69 \leq \ln(2) \leq 0,70$ , on en déduit donc  $2,07 \leq \ln(8) \leq 2,10$ .

Ensuite on sait que  $\ln\left(\frac{3}{8}\right) = \ln(3) - \ln(8)$ .

Comme  $1,09 \leq \ln(3) \leq 1,10$  et  $2,07 \leq \ln(8) \leq 2,10$ , alors  $1,09 - 2,10 \leq \ln(3) - \ln(8) \leq 1,10 - 2,07$  d'où  $-1,01 \leq \ln\left(\frac{3}{8}\right) \leq -0,97$ .

## Exercice 2:

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ .

### Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Remarquons que pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 4 \geq 4 > 0$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme composée de la fonction  $x \mapsto x^2 + 4$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0; +\infty[$  à valeurs dans  $[4; +\infty[$  suivie de la fonction  $\ln$  dérivable sur  $[0; +\infty[$  donc sur  $[4; +\infty[$ .

Pour tout réel  $x$ , on a alors  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$ .

On a pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $x^2 + 4 > 0$  et  $2x \geq 0$  donc  $f'(x) \geq 0$ .

La fonction  $f$  est donc croissante sur  $[0; +\infty[$ .

2. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - x$ .

a. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ , la fonction  $f$  et la fonction  $x \mapsto -x$ .

Pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2x}{x^2 + 4} - 1 = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4} = -\frac{(x-1)^2}{x^2 + 4}$ .

Pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $x^2 + 4 > 0$  et  $(x-1)^2 \geq 0$  donc  $g'(x) \leq 0$ .

La fonction  $g$  est donc décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

b. Montrer que sur l'intervalle  $[2; 3]$ , l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution que l'on notera  $\alpha$ .

Donner la valeur arrondie de  $\alpha$  à  $10^{-1}$ .

On a:  $g(2) = f(2) - 2 = \ln(2^2 + 4) - 2 = \ln(8) - 2 = 3 \ln(2) - 2 \approx 0,079 > 0$

$g(3) = f(3) - 3 = \ln(3^2 + 4) - 3 = \ln(13) - 3 \approx -0,435 < 0$ .

Par suite on sait que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[2; 3]$ , continue, puisque dérivable sur  $[2; 3]$ .

Alors comme  $0 \in [g(2); g(3)]$ , on déduit du théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à une fonction strictement monotone que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  appartenant à  $[2; 3]$ .

Par balayage, on obtient:

•  $f(2,1) \approx 0,029 > 0$  et  $f(2,2) \approx -0,021 < 0$  donc  $2,1 < \alpha < 2,2$ ;

•  $f(2,15) \approx 0,0043 > 0$  et  $f(2,16) \approx -0,0006 < 0$  donc  $2,15 < \alpha < 2,16$ .

Par suite la valeur arrondie de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près est 2,2.

c. Justifier que le nombre réel  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $f(x) = x$  sur  $[0; +\infty[$ .

On sait que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

Par suite pour tout réel  $x$ , tel que  $0 \leq x \leq 2$ ,  $g(x) \geq g(2) > 0$  et donc l'équation  $g(x) = 0$  n'admet pas de solution sur  $[0; 2]$ .

De même, pour tout réel  $x$  tel que  $x \geq 3$ ,  $g(x) \leq g(3) < 0$  et donc l'équation  $g(x) = 0$  n'admet pas de solution sur  $[3; +\infty[$ .

Finalement comme l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution sur  $[2; 3]$ , on conclut que l'équation admet pour unique solution sur  $[0; +\infty[$  le réel  $\alpha$  défini à la question **b**.

Remarquons alors que l'équation  $f(x) = x$  revient à l'équation  $f(x) - x = 0$  et donc à  $g(x) = 0$ .

Par suite comme l'équation  $g(x) = 0$  admet l'unique solution  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$  alors l'équation  $f(x) = x$  admet  $\alpha$  pour unique solution sur  $[0; +\infty[$ .

## Partie B

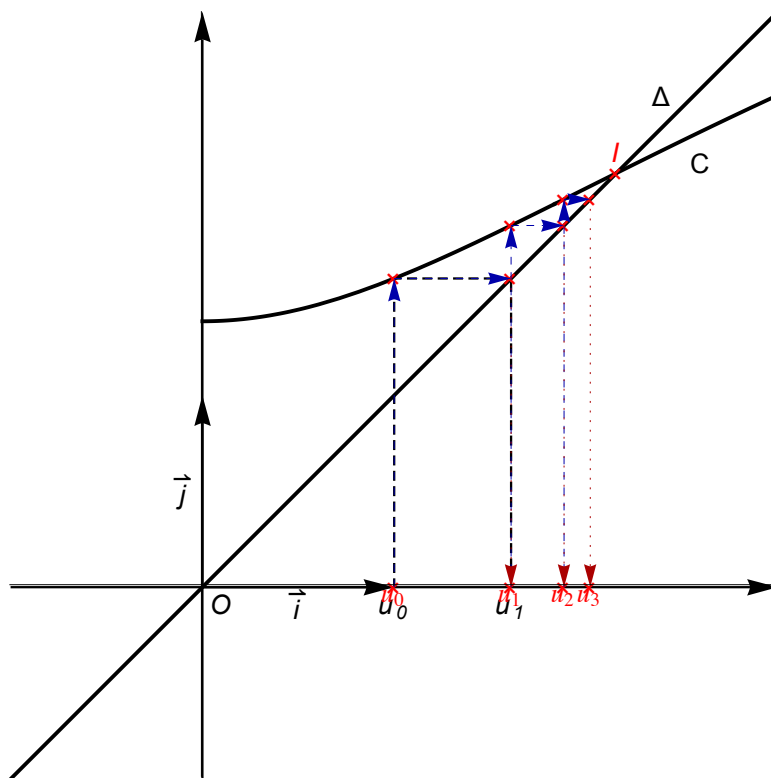
*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

La courbe  $C$  représentative de la fonction  $f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  sont tracées sur le graphique donné en **annexe** (à rendre avec la copie).

1. À partir de  $u_0$ , en utilisant la courbe  $C$  et la droite  $\Delta$ , on a placé  $u_1$  sur l'axe des abscisses.

De la même manière, placer les termes  $u_2$  et  $u_3$  sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.



2. Placer le point  $I$  de la courbe  $C$  qui a pour abscisse  $\alpha$ .

3. a. Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a  $1 \leq u_n \leq \alpha$ .

On raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

On définit pour  $n$  entier naturel, la proposition  $\mathcal{P}(n)$  :  $1 \leq u_n \leq \alpha$ .

Pour  $n = 0$ , on  $u_0 = 1$  et donc comme on sait que  $2, 1 < \alpha < 2, 2$ , on a donc  $1 \leq u_0 \leq \alpha$ .

La proposition  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Soit  $n$  un entier naturel.

On fait l'hypothèse de récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Ainsi on sait que  $1 \leq u_n \leq \alpha$ .

On a montré que la fonction  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  donc en particulier sur  $[1; \alpha]$ .

Or par hypothèse de récurrence,  $1 \leq u_n \leq \alpha$ .

Par suite  $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$ .

Or:

$$f(1) = \ln(1^2 + 4) = \ln(5) \approx 1,61 > 1$$

$$f(u_n) = u_{n+1}$$

$$f(\alpha) = \alpha$$

D'où finalement,  $1 \leq \ln(5) \leq u_{n+1} \leq \alpha$  donc  $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$ : la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.  
La proposition  $\mathcal{P}(n)$  est héréditaire.

En conclusion, comme la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour  $n=0$  et héréditaire pour  $n \geq 0$ , alors elle est vraie pour tout entier naturel  $n \geq 0$ .

Par suite, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $1 \leq u_n \leq \alpha$ .

**b.** Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge.

Déterminons le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

On a  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$ .

Or la fonction  $g$  est décroissante sur  $[1; \alpha]$  et  $g(\alpha) = 0$ .

On sait que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq \alpha$ , donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $g(u_n) \geq 0$  et donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

De plus elle est majorée par  $\alpha$ .

D'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est donc convergente.

**c.** Déterminer sa limite.

On note  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ .

Alors on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

D'autre part, comme la fonction  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(\ell)$ .

Finalement  $\ell$  est solution de l'équation  $f(\ell) = \ell$ .

On sait que cette équation admet  $\alpha$  pour unique solution.

Donc  $\ell = \alpha$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .