Travail autonome

Mathématiques, Série S

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Bonnes recherches.

Exercice 1:

1. Restitution organisée des connaissances
Pré-requis :

– la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$.

– $\ln(1) = 0$

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x, $\ln(a\,x) = \ln(a) + \ln(x)$.

2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ et que $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ pour tous réels strictement positifs a et b.

3. On donne $0,69 \leq \ln(2) \leq 0,70$ et $1,09 \leq \ln(3) \leq 1,10$.

En déduire des encadrements de $\ln(6)$, $\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$ et $\ln\left(\dfrac{3}{8}\right)$.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x^2+4\right)$.

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. Montrer que sur l'intervalle $[2;3]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.
Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1}.

c. Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$.

La courbe C représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en **annexe** (à rendre avec la copie).

1. À partir de u_0, en utilisant la courbe C et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses.
De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

2. Placer le point I de la courbe C qui a pour abscisse α.

3. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \leq u_n \leq \alpha$.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

c. Déterminer sa limite.

Annexe:

À rendre avec la copie.

Exercice 1: