Travail autonome n°8

Mathématiques, Série S

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Bonnes recherches.

Exercice 1:

Commun à tous les candidats

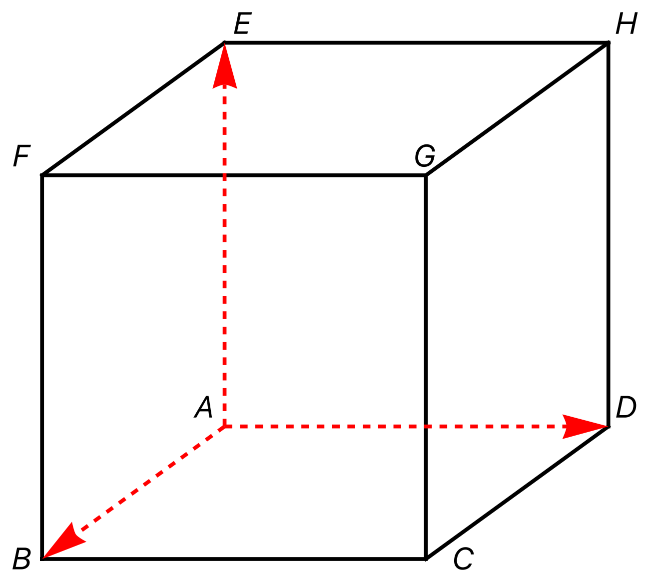
On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe.

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$.

Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}$.
La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.

annexe:



Exercice 2:

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on donne les points :

$$A(1;2;3)\ ,\ B(3;0;1)\ ,\ C(-1;0;1)\ ,\ D(2;1;-1)\ ,\ E(-1;-2;3)\ \text{ et }\ F(-2;-3;4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0;1;-1)$ est une vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment $[BC]$.

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 3:

Commun à tous les candidats

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.

L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.

Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube $ABCDEFGH$ en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.
Représenter la molécule dans le cube donné **en annexe page ...**

Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

2. Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.

3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène c'est-à-dire l'angle $A\hat{\Omega}C$.

Exercice 4:

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1;2;5)$, $B(-1;6;4)$, $C(7;-10;8)$, et $D(-1;3;4)$.

1. Proposition 1 : Les points A, B et C définissent un plan.

2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.
Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.

3. Proposition 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{cases}$$

4. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + z + 5 = 0$ et $\mathcal{P}$' le plan d'équation cartésienne $-3x - y + z + 5 = 0$.
Proposition 4 : Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$' sont parallèles.

Exercice 5:

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'enlève pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

1. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(2\,;\,5\,;\,-1)$, $B(3\,;\,2\,;\,1)$ et $C(1\,;\,3\,;\,-2)$. Le triangle ABC est :

a. rectangle et non isocèle

b. isocèle et non rectangle

c. rectangle et isocèle

d. équilatéral

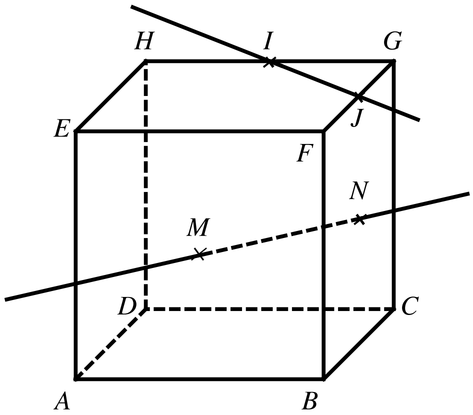
2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point $A(2\,;\,5\,;\,-1)$. Une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passant par A est :

a. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

3. Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est :

a. L'ensemble vide **b.** La médiatrice du segment $[AB]$ **c.** Le cercle de diamètre $[AB]$ **d.** La droite (AB)

4. La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[GH]$ et $[FG]$. Les points M et N sont les centres respectifs des faces $ABFE$ et $BCGF$.



Les droites (IJ) et (MN) sont :

a. perpendiculaires

b. sécantes, non perpendiculaires

c. orthogonales

d. parallèles

Exercice 6:

Commun à tous les candidats

On considère un cube $ABCDEFCH$ donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).

On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L.

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B :

L'espace est rapporté au repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.

2. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1; 1; \frac{5}{8}\right)$.

Le triangle TPN est-il rectangle en T ?