

Travail autonome

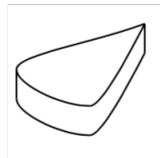
Mathématiques, Série S

**L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Bonnes recherches.**

Exercice 1:

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.

Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

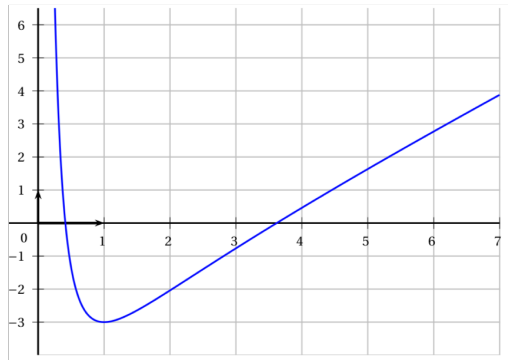


Partie A: modélisation par une fonction.

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur

$$]0; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3 \ln(x)}{x}.$$

La représentation graphique de f est donnée ci-dessous:



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = x^2 - 1 + 3 \ln(x)$.

a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b. Étudier les variations de φ sur $]0; +\infty[$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x .

2. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variation de f .

c. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$.

Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1; +\infty[$ avec $\beta \approx 3,61$ à 10^{-2} près.

d. Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln(x) - \frac{3}{2}(\ln(x))^2$.

Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Partie B: résolution du problème.

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} près de α et β de la partie A.

Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative C de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha; \beta]$ ainsi que son symétrique C' par rapport à l'axe des abscisses.

Les deux courbes C et C' délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm. Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?

Exercice 2

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1; +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, $f(x) = \frac{1}{x} \ln(x)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe C admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1; +\infty[$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) dx$ pour tout entier naturel n .

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2} (\ln(2))^2$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que, pour tout entier naturel n , et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 2]$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$
3. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Étudier le signe de sa fonction dérivée f' , sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

- a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
- b. Montrer, sans chercher à calculer u_n , que, pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = (\ln(x+3))^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x , le nombre $F'(x)$.

b. On pose pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^n f(x) dx$. Calculer I_n .

4. On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$. Calculer S_n . La suite (S_n) est-elle convergente ?

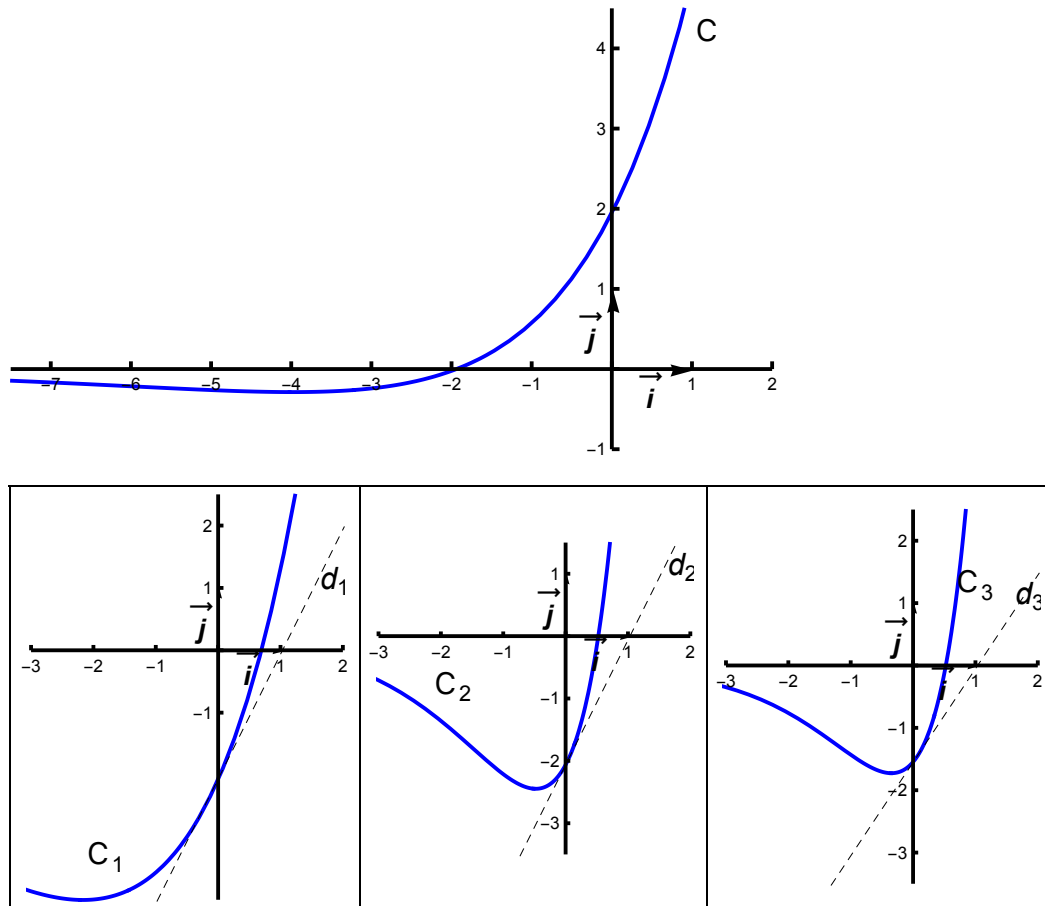
Exercice 4

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe C et trois autres courbes C_1 , C_2 et C_3 avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. A l'aide de la courbe C , déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

b. L'une des courbes C_1 , C_2 et C_3 est la courbe représentative de la fonction F . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe C permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.

b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$.

a. Interpréter géométriquement le réel I .

b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.

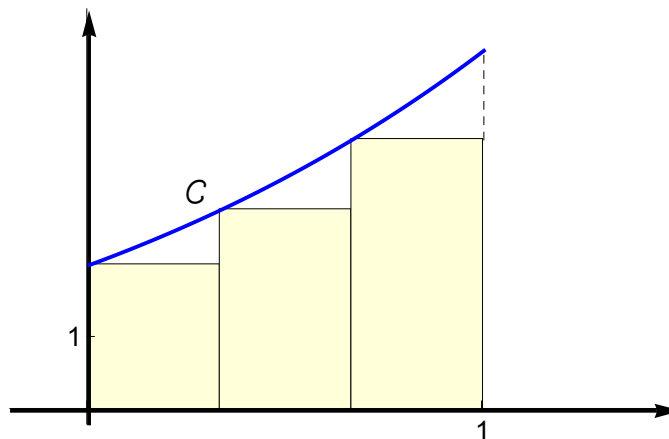
c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n - 1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s .

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



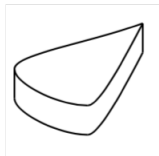
b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Éléments de solutions

Exercice 1:

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.

Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

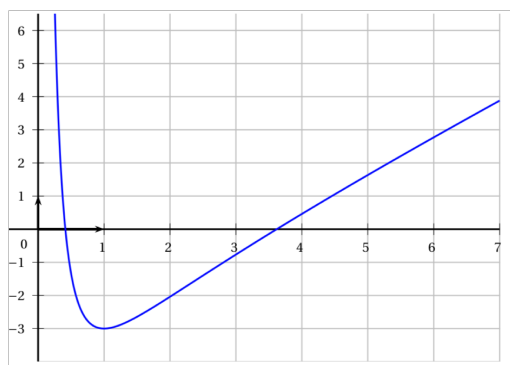


Partie A: modélisation par une fonction.

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur

$$]0; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3 \ln(x)}{x}.$$

La représentation graphique de f est donnée ci-dessous:



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = x^2 - 1 + 3 \ln(x)$.
 - a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.
 - b. Étudier les variations de φ sur $]0; +\infty[$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x .
2. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - b. Montrer que sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variation de f .
 - c. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1; +\infty[$ avec $\beta \approx 3,61$ à 10^{-2} près.

- d. Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 \ln(x) - \frac{3}{2}(\ln(x))^2$.

Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Partie B: résolution du problème.

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} près de α et β de la partie A.

Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative C de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha; \beta]$ ainsi que son symétrique C' par rapport à l'axe des abscisses.

Les deux courbes C et C' délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm. Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?

Exercice 2:

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1; +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, $f(x) = \frac{1}{x} \ln(x)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe C admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1; +\infty[$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) dx$ pour tout entier naturel n .

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2} (\ln(2))^2$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que, pour tout entier naturel n , et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 2]$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3:

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Étudier le signe de sa fonction dérivée f' , sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

- a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
- b. Montrer, sans chercher à calculer u_n , que, pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = (\ln(x+3))^2$.

- a. Justifier la dérivabilité sur $[0; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x , le nombre $F'(x)$.

- b. On pose pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^n f(x) dx$. Calculer I_n .

4. On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$. Calculer S_n . La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 3:

Partie A

Partie B

Exercice :

Correction

Exercice :
