Devoir surveillé n°1

Éléments de solutions

Exercice 1 (QCM):

#	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$f'(0) =$	$\frac{1}{2}$	2	4
2	Une équation de la tangente à la courbe C au point D est:	$y = -x + 6{,}5$	$y = x - 6{,}5$	$y = -2x + 11$
3	L'équation $f(x) > 0$ a pour ensemble de solutions:	$]0\ ;\ 11[$	$]-2\ ;\ 7{,}5[$	$]-2\ ;\ 2[$
4	L'équation $f'(x) > 0$ a pour ensemble de solutions:	$]0\ ;\ 11[$	$]-2\ ;\ 7{,}5[$	$]-2\ ;\ 2[$

#	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
5	Quelle courbe représente la fonction dérivée f' de f ?	C_1	C_2	C_3
6	Quelle courbe représente une fonction dont la dérivée est f. Laquelle ?	C_1	C_2	C_3

Exercice 2:

1. On a $u_0 = 0 = \sqrt{0}$, $u_1 = \sqrt{{u_0}^2 + 1} = \sqrt{1}$, $u_2 = \sqrt{{u_1}^2 + 1} = \sqrt{2}$, $u_3 = \sqrt{{u_2}^2 + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{3}$.

Par suite on peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{n}$.

2. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

On définit pour n entier naturel, la proposition $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \sqrt{n}$.

Initialisation:

Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\sqrt{0} = 0$donc $u_0 = \sqrt{0}$.
La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité:
Soit n un entier.

On fait l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire $u_n = \sqrt{n}$.

On sait que $u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + 1}$.

Alors comme par hypothèse de récurrence, $u_n = \sqrt{n}$, on obtient $u_{n+1} = \sqrt{\left(\sqrt{n}\right)^2 + 1} = \sqrt{n+1}$.

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion:
La proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire pour $n \geq 0$.
D'après l'axiome de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

Par suite, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{n}$.

Exercice 3:

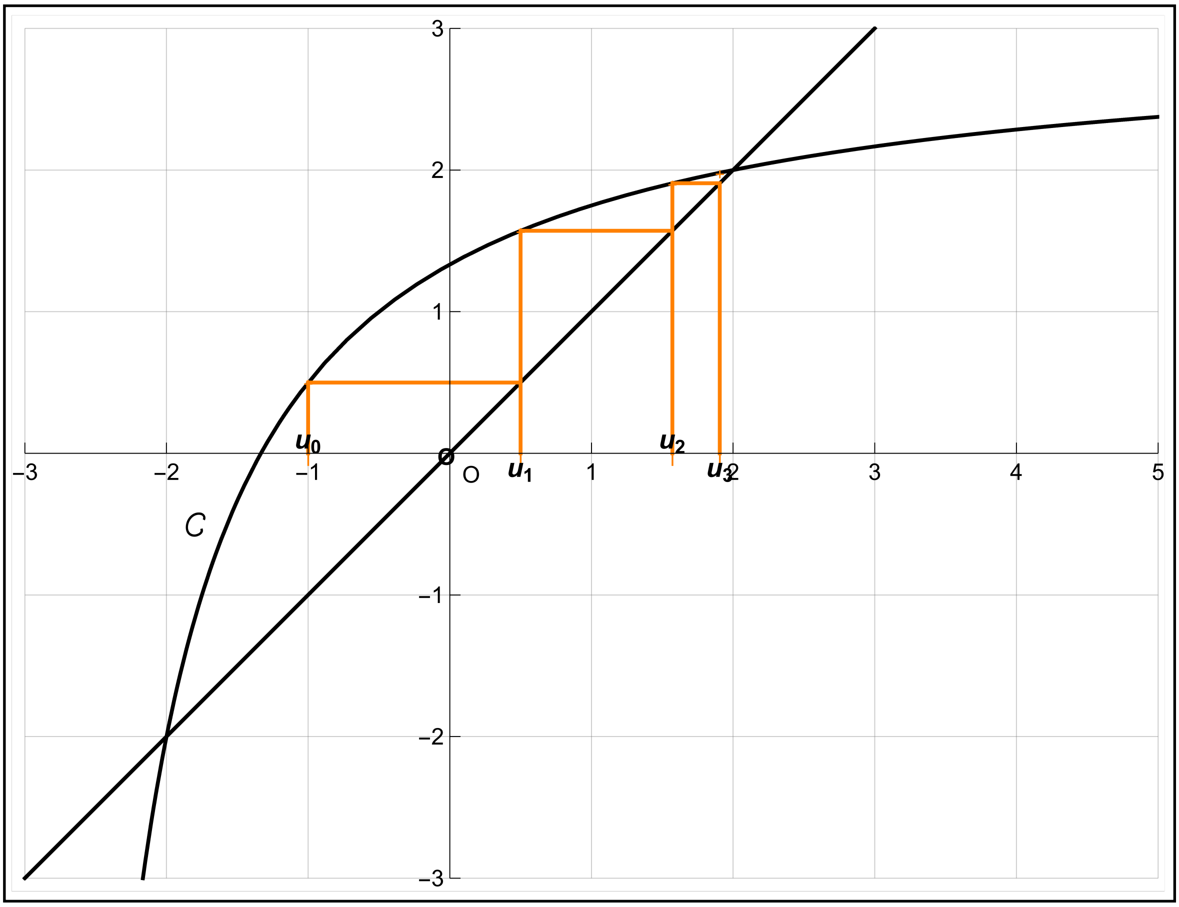
On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n + 3} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$.

1. La fonction f est dérivable sur $]-3;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]-3;+\infty[$ donc le dénominateur ne s'annule pas sur $]-3;+\infty[$.

Pour tout réel $x\in]-3;+\infty[$, on a $f'(x)=\dfrac{3\,(x+3)-(3\,x+4)\times 1}{(x+3)^2}=\dfrac{5}{(x+3)^2}$.

Comme $3>0$ et comme un carré est toujours positif, $f'(x)\geq 0$ pour tout réel $x>-3$.
La fonction f est donc croissante sur $]-3;+\infty[$.

2. On obtient:



On peut conjecturer d'après le graphique:

- La suite (u_n) est bornée: tous les termes représentés sont dans l'intervalle $[-1;2]$.
- La suite est croissante.

3. On raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
On définit pour n entier naturel, la proposition $Q(n)$: $-1\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 2$.

Initialisation:

Pour $n=0$, on a $u_0=-1$ d'où $u_1=\dfrac{3\times(-1)+4}{-1+3}=\dfrac{1}{2}$.

Or $-1\leq -1\leq \dfrac{1}{2}\leq 2$ donc $-1\leq u_0\leq u_1\leq 2$.

La propriété $Q(0)$ est vraie.

Hérédité:

Soit n un entier.
On fait l'hypothèse de récurrence, $Q(n)$ est vraie, c'est à dire $-1\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 2$.

On a donc par hypothèse de récurrence, $\begin{cases} u_n\in]-3;+\infty[\\ u_{n+1}\in]-3;+\infty[\\ -3<-1\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 2\end{cases}$.

Alors comme d'après la question **1.** la fonction f est croissante sur $]-3;+\infty[$, on obtient $f(-1)\leq f(u_n)\leq f(u_{n+1})\leq f(2)$.

Or $\begin{cases} f(-1) = \frac{1}{2} \geq -1 \\ f(u_n) = u_{n+1} \\ f(u_{n+1}) = u_{n+2} \\ f(2) = 2 \end{cases}$ donc finalement $-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

La proposition $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. La proposition $\mathcal{Q}(n)$ est héréditaire.

Conclusion:

La proposition $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire pour $n \geq 0$ donc, d'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

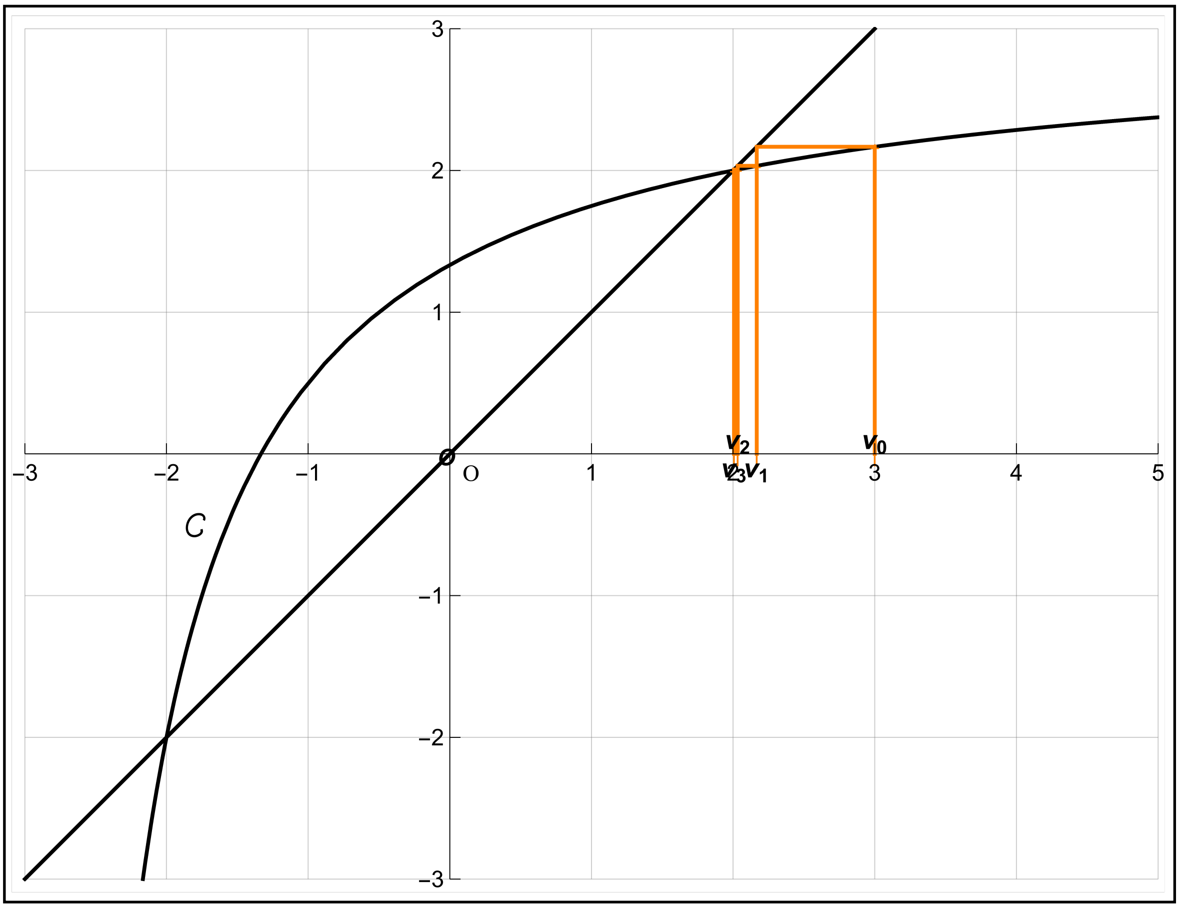
Ainsi pour tout entier naturel n, $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

En particulier, on a donc obtenu:

- pour tout entier naturel n, $-1 \leq u_n \leq 2$: la suite (u_n) est bornée
- pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante.

4. On définit la suite (v_n) par $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{3\,v_n + 4}{v_n + 3} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$.

Graphiquement, on obtient:



Donc la suite (v_n) est bornée mais décroissante.

On peut observer que la propriété $\mathcal{R}(n)$: $f(v_n) \leq v_n$ est héréditaire comme la propriété $\mathcal{R}'(n)$: $v_n \leq f(v_n)$.
Tout dépend donc de l'initialisation.

Pour la suite (v_n), on montre par récurrence la proposition $\mathcal{T}_n$: $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 4$.

Initialisation:

Pour $n = 0$, on a $v_0 = 4$ d'où $v_1 = \dfrac{3 \times 4 + 4}{4 + 3} = \dfrac{16}{7}$.

Or $2 \leq \dfrac{16}{7} \leq 4 \leq 4$ donc $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 4$.

La propriété $\mathcal{T}(0)$ est vraie.

Hérédité:
Soit n un entier.
On fait l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{T}(n)$ est vraie, c'èst à dire $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 4$.

On a donc par hypothèse de récurrence, $\begin{cases} v_n \in]-3;+\infty[\\ v_{n+1} \in]-3;+\infty[\\ -3 < 2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 4 \end{cases}$.

Alors comme d'après la question **1.** la fonction f est croissante sur $]-3;+\infty[$, on obtient $f(2) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(4)$.

Or $\begin{cases} f(4) = \dfrac{16}{7} \leq 4 \\ f(v_n) = v_{n+1} \\ f(v_{n+1}) = v_{n+2} \\ f(2) = 2 \end{cases}$ donc finalement $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 4$.

La proposition $\mathcal{T}(n+1)$ est vraie. La proposition $\mathcal{T}(n)$ est héréditaire.

Conclusion:
La proposition $\mathcal{T}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire pour $n \geq 0$ donc, d'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.
Ainsi pour tout entier naturel n, $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 4$.

En particulier, on a donc obtenu:
- pour tout entier naturel n, $2 \leq v_n \leq 4$: la suite (v_n) est bornée
- pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leq v_n$: la suite (v_n) est décroissante.

Bonus:

On remarque qu'à chaque nouvelle rangée on ajoute le nombre impair suivant de cubes.
Ainsi pour 100 rangées, le nombre de cubes est donné par la somme des 100 premiers entiers impairs c'est à dire $\sum_{k=1}^{100}(2k-1)$.

Il s'agit donc de calculer la somme des 100 premiers entiers impairs.

On peut remarquer que $1 = 1^2$, $1+3 = 4 = 2^2$, $1+3+5 = 9 = 3^2$ d'où la formule $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, soit $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
Démontrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

On définit pour n entier naturel ≥ 1, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « la somme des n premiers entiers impairs vaut le carré de n », c'est à dire que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, soit $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

On a pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1$ et $1^2 = 1$ donc $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1^2$: la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit n un entier.

On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On suppose donc que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

On a:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1)$$
$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2n + 1$$

Alors comme par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, on obtient:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2\,k-1)=n^2+2\,n+1$$
$$\sum_{k=1}^{n+1}(2\,k-1)=(n+1)^2.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
La propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

En conclusion, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n=1$ et est héréditaire pour $n \geq 1$.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Ainsi pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n}(2\,k-1)=n^2$.

Finalement, on sait que l'on a donc utilisé $100^2 = 10\,000$ cubes.