Devoir surveillé n°2, TS4

Éléments de solutions

Exercice 1

Partie A: Étude d'une fonction auxiliaire

1.a. Remarquons que pour tout réel x, $g(x) = x^3 + (-3\,x - 4)$.
Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto -3\,x - 4$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues.

c). Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto -3\,x - 4$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
Pour tout réel x, on a $g'(x) = 3\,x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3\,(x - 1)\,(x + 1)$.
On a:
• $3 > 0$;
• $x - 1 > 0$ si $x > 1$;
• $x + 1 > 0$ si $x > -1$.
On en déduit le tableau de signes pour $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	|	$+$	
$x^3 - 3\,x - 4$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$g'(x)$		$+$	|	$-$	|	$-$	

Finalement, $g'(x) > 0$ si $x \in]-\infty\,;\ -1[\bigcup]\,1\,;\ +\infty\,[$, $g'(x) = 0$ si $x = -1$ ou $x = 1$ et $g'(x) < 0$ si $x \in]-1\,;\ 1\,[$.
Alors on en déduit que g est strictement croissante sur $]-\infty\,;\ -1]$ et sur $[1\,;\ +\infty\,[$ et strictement décroissante sur $[-1\,;\ 1\,]$.
On obtient le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

2.a. On a :
• La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty\,;\ -1]$.
Alors pour tout réel $x \in]-\infty\,;\ -1[$, on a $g(x) < g(-1)$.
Or $g(-1) = -2 < 0$ donc pour tout réel $x \in]-\infty\,;\ -1[$, on a $g(x) < -2 < 0$.
Ainsi l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty; -1]$.

• La fonction g est strictement décroissante sur $[-1\,;\ 1]$.
Alors pour tout réel $x \in]-1\,;\ 1\,]$, on a $g(x) < g(-1)$.
Or $g(-1) = -2 < 0$ donc pour tout réel $x \in]-\infty\,;\ -1[$, on a $g(x) < -2 < 0$.
Ainsi l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-1\,;\ 1]$.

• La fonction g est strictement croissante et continue sur $[\ 1\ ;\ 3]$.
De plus $g(1) = -6 < 0$ et $g(3) = 14 > 0$.
On sait donc qu'il existe un unique réel $\alpha \in [\ 1\ ;\ 3]$, solution de l'équation $g(x) = 0$.

• La fonction g est strictement croissante sur $[3; +\infty[$ donc pour tout réel $x \geq 3$, $g(x) \geq g(3) \geq 14 > 0$.
L'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[3; +\infty[$.

En conclusion, il n'existe aucun réel x dans $]-\infty\ ;\ -1\ ]$ ni dans $[-1\ ;\ 1\ ]$ ni dans $[3; +\infty[$ tel que $g(x) = 0$ et il existe un unique réel $x = \alpha$ dans $[\ 1\ ;\ 3]$ tel que $g(x) = 0$, donc il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

b. On procède par balayage:
• On a $g(2) = -2 < 0$ et $g(3) = 14 > 0$ donc on peut affirmer que $\alpha \in [\ 2\ ;\ 3\ ]$;
• On a $g(2,1) \approx -1,039 < 0$ et $g(2,2) \approx 0,048 > 0$ donc on peut affirmer que $\alpha \in [\ 2,1\ ;\ 2,2\ ]$;
• On a $g(2,19) \approx -0,067 < 0$ et $g(2,20) \approx 0,048 > 0$ donc on peut affirmer que $\alpha \in [\ 2,19\ ;\ 2,20\ ]$.

On a donc l'encadrement à 10^{-2} de α : $2,19 < \alpha < 2,20$.

3.
• On a montré à la question **2.a.** que pour tout réel x dans $]-\infty\ ;\ -1]$ et $[-1\ ;\ 1\ ]$, $g(x) < 0$.
• On sait d'autre part que la fonction g est strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty\ [$ et qu'il existe un unique réel α dans $[\ 1\ ;\ +\infty\ [$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Alors on sait donc que pour tout réel $x \in [\ 1\ ;\ \alpha\ [$, $g(x) < g(\alpha)$ donc $g(x) < 0$ et pour tout réel $x \in]\ \alpha\ ;\ +\infty\ [$, $g(x) > g(\alpha)$ donc $g(x) > 0$.
Finalement, on a montré que pour tout réel $x \in]-\infty\ ;\ \alpha\ [$, $g(x) < 0$, et pour tout réel $x \in]\ \alpha\ ;\ +\infty\ [$, $g(x) > 0$.

Partie B: Étude de la fonction f

1. Les fonctions $x \mapsto x^3 + 2x^2$ et $x \mapsto x^2 - 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur D et de plus la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ ne s'annule pas sur D .
La fonction f est donc dérivable sur D comme quotient de fonctions dérivables sur D.
Pour tout réel x de D, on a alors
$f'(x) =$

$$\frac{\left(3x^2 + 2\times 2x\right)\left(x^2 - 1\right) - \left(x^3 + 2x^2\right)\times 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{3x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 2x^4 - 4x^3}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{x\left(x^3 - 3x - 4\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

Alors comme on a pour tout réel x , $g(x) = x^3 - 3x - 4$, on en déduit que $f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$.

2. Un carré est toujours positif et donc comme de plus $x^2 - 1 \neq 0$ pour $x \in D$, alors pour tout $x \in D$, $\left(x^2 - 1\right)^2 > 0$.
ainsi $f'(x)$ est du signe de $x\,g(x)$.
En utilisant les résultats établies à la question **3).** de la partie A, on obtient le tableau de signes:

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x^3 - 3x - 4$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

On en déduit donc que $f'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -1\ [\ \bigcup\ ]-1\ ;\ 0\ [\ \bigcup\ ]\ \alpha\ ;\ +\infty\ [$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]\ 0\ ;\ 1\ [\ \bigcup\ ]\ 1;\ \alpha\ [$.
Finalement, f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$, sur $]-1\ ;\ 0\ [$ et sur $]\ \alpha\ ;\ +\infty\ [$ et strictement décroissante sur $]\ 0\ ;\ 1\ [$ et sur $]\ 1\ ;\ \alpha\ [$.
On obtient le tableau de variation pour f :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2:

Partie A: Étude d'une fonction.

1. Le nombre $f(x)$ est défini si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} \text{ est définie} \\ \dfrac{1-x}{1+x} \geq 0 \end{cases}$.

Le nombre $\dfrac{1-x}{1+x}$ est défini si $1+x \neq 0$ donc pour tout réel $x \neq -1$.

Étudions le signe de $\dfrac{1-x}{1+x}$.

On sait que:

- $1-x > 0$ si $x < 1$
- $1+x > 0$ si $x > -1$.

On en déduit le tableau de signes pour $\dfrac{1-x}{1+x}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$\frac{1-x}{x+1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

On obtient donc que $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$ pour $x \in]-1; 1]$ et donc la fonction f est définie sur $]-1; 1]$.

2. La fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Alors on sait que f est dérivable sur l'ensemble des réels x tels que $u(x) > 0$.

D'après la question **1.**, on obtient que $u(x) > 0$ pour $x \in]-1; 1[$. Par suite f est dérivable sur $]-1; 1[$.

Soit $x \in]-1; 1[$.

On sait que $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Or $u(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ donc $u'(x) = \dfrac{(-1)\times(1+x)-(1-x)\times 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$. Par suite

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} = -\frac{1}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}.$$

3. Un carré est toujours positif et une racine carrée est aussi toujours positive. Par suite pour tout réel $x \in]-1; 1[$,

$(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} > 0$.

On en déduit $f'(x) < 0$ pour tout réel $x \in]-1; 1[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-1; 1]$.

4. La fonction f est décroissante sur $]-1; 1]$ donc en particulier sur $[0; 1]$. Alors pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 1$, on obtient $f(0) \geq f(x) \geq f(1)$.

Or $f(0) = \sqrt{\dfrac{1-0}{1+0}} = 1$ et $f(1) = \sqrt{\dfrac{1-1}{1+1}} = 0$ donc $0 \leq f(x) \leq 1$. Donc si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.

Partie B: Étude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{5} \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-u_n}{1+u_n}} \end{cases}$.

1. Pour tout entier naturel n, l'algorithme affiche la valeur du terme de rang $n-1$ de la suite.

En effet, à chaque étape i, l'algorithme affecte à la variable u, la valeur $\sqrt{\dfrac{1-u}{1+u}}$, c'est donc le terme suivant de la suite (u_n) et ce, à partir de $u_0 = \dfrac{1}{5}$ et jusqu'à ce que i atteigne le rang $n-1$.

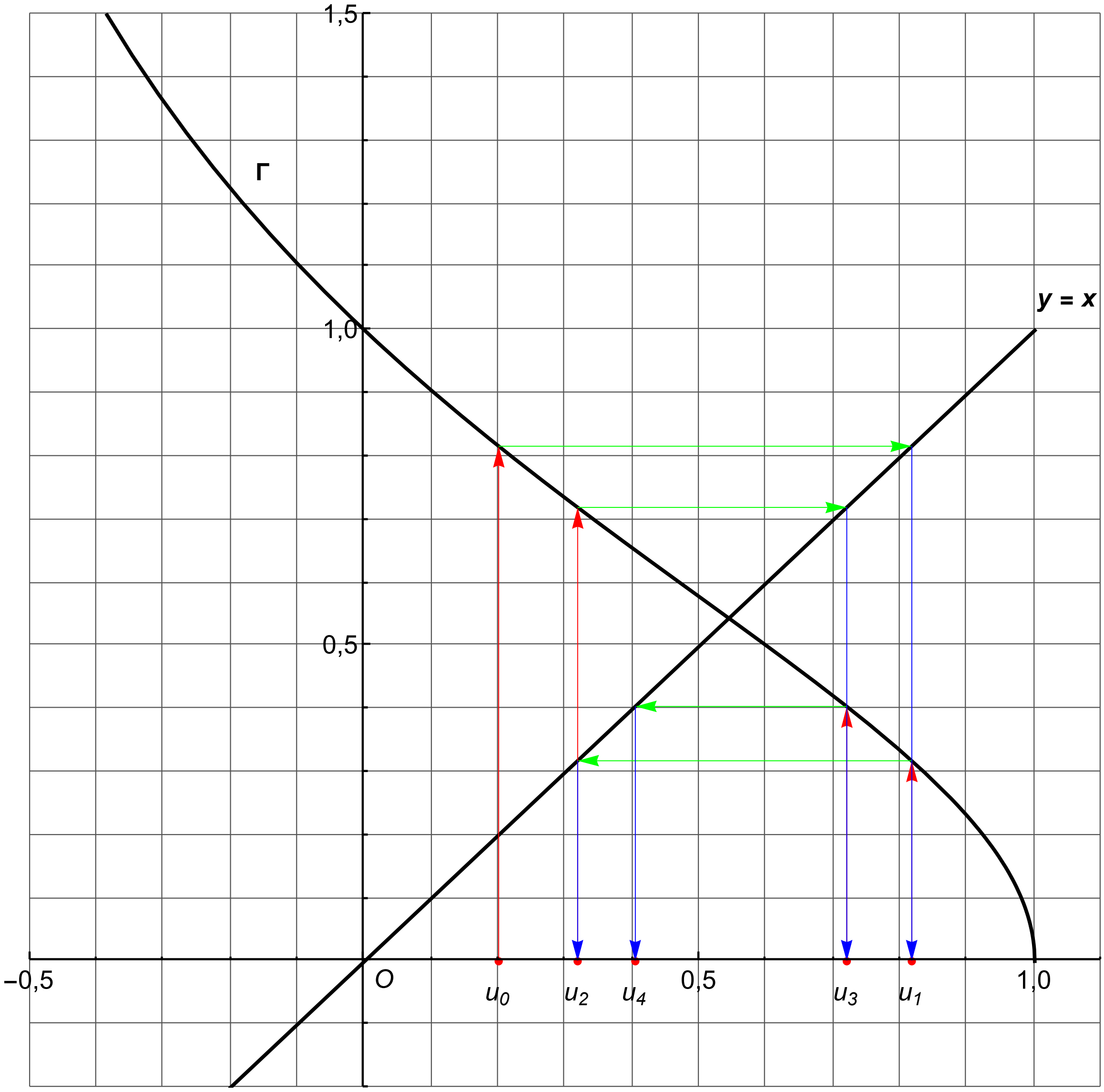
On a le schéma pour $n = 4$:

	valeur de i	valeur de u	notation naturelle	test	valeur affectée à u	valeur affectée à i
boucle 1	1	1/5	u_0	1<4: vrai	$f(1/5)$	2
boucle 2	2	$f(1/5)$	u_1	2<4: vrai	$f(f(1/5))$	3
boucle 3	3	$f(f(1/5))$	u_2	3<4: vrai	$f(f(f(1/5)))$	4
boucle 4	4	$f(f(f(1/5)))$	u_3	4<4: faux		

En valeurs exactes, on obtient:

rang	0	1	2	3	4
valeur exacte	$\frac{1}{5}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}}$	$\sqrt{\left(\left(1-\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)}\right)\Big/\left(1+\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)}\right)\right)}$	$\sqrt{\left(\left(1-\sqrt{\left(\left(1-\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)}\right)\Big/\left(1+\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)}\right)\right)}\right)\Big/\left(1+\sqrt{\left(\left(1-\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)}\right)\Big/\left(1+\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)}\right)\right)}\right)\right)}$
valeur approchée	0.2	0.816496580927726	0.317837245195782	0.719470701422262	0.403916619387825

2.a. En utilisant la courbe Γ de la fonction f représentée en **annexe**, construire les 5 premiers termes de la suite (u_n).



b. On peut assurer que la suite n'est pas monotone. Par contre, on peut conjecturer que la suite est bornée.

3. On définit pour n entier naturel, la propriété $\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 0$: on sait que $u_0 = \frac{1}{5}$.

Or $0 \leq \frac{1}{5} \leq 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$: la propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Soit n un entier.
On fait l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire $0 \leq u_n \leq 1$.
On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$.
On sait aussi que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
Alors comme par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq 1$, $u_n \in [0; 1]$ et donc $f(u_n) \in [0; 1]$, c'est à dire $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Finalement, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n \geq 0$ et est héréditaire pour $n \geq 0$.
D'après l'axiome de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
Par suite pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.