Devoir surveillé n°3

Éléments de solutions

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+2}{x+2}$.

1. **a.** Calculer la dérivée $f'(x)$ de f. Montrer que $f'(x)=\dfrac{4(x+1)\left(x^2+2x-2\right)}{(x+2)^2}$.

Pour tout réel $x>-2$, $f'(x)=\dfrac{\left(2\times 3x^2-3\right)(x+2)-\left(2x^3-3x+2\right)\times 1}{(x+2)^2}=\dfrac{4x^3+12x^2-8}{(x+2)^2}=\dfrac{4\left(x^3+3x^2-2\right)}{(x+2)^2}$.

Or $(x+1)\left(x^2+2x-2\right)=x^3+2x^2-2x+x^2+2x-2=x^3+3x^2-2$.

Par suite $f'(x)=\dfrac{4(x+1)\left(x^2+2x-2\right)}{(x+2)^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $]-2;+\infty[$.

Un carré est toujours positif donc $(x+2)^2>0$ pour $x>-2$ et $4>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x+1)\left(x^2+2x-2\right)$.

Or:

- $x+1>0$ pour $x>-1$.
- x^2+2x-2 est un trinôme du second degré.

Son discriminant est $\Delta=2^2-4\times 1\times(-2)=12>0$ donc il admet 2 racines $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{12}}{2\times 1}=-1-\sqrt{3}<-2$ et $x_2=-1+\sqrt{3}>-1$.

De plus son coefficient des x^2 est $1>0$ donc on sait que $x^2+2x-2>0$ pour $x\in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$ et $x^2+2x-2<0$ pour $x\in]x_1;x_2[$.

On en déduit le tableau de signes pour $f'(x)$ sur $]-2;+\infty[$:

x	-2		-1		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+2x-2		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+1)\left(x^2+2x-2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations pour f :

x	-2		-1		$\sqrt{3}-1$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$f\left(\sqrt{3}-1\right)>0$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-1,5;-1[$.

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur $[-1,5;-1]$.
De plus $f(-1,5) = -0,5 < 0$ et $f(-1) = 3 > 0$.
Par suite, on sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-1,5;-1[$.

Remarque:
La fonction f est continue sur $]-2;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]-2;+\infty[$ donc le dénominateur ne s'annule pas sur $]-2;+\infty[$.

b. Donner un valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

On a:
- $f(-1,5) \approx -0,5 < 0$ et $f(-1,4) \approx 1,18 > 0$ donc $-1,5 < \alpha < -1,4$
- $f(-1,48) \approx -0,08 < 0$ et $f(-1,47) \approx 0,1 > 0$ donc $-1,48 < \alpha < -1,47$
- $f(-1,476) \approx -0,006 < 0$ et $f(-1,4) \approx 0,013 > 0$ donc $-1,476 < \alpha < -1,475$

Donc $\alpha = -1,48$ à 10^{-2} près.

c. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle d'autres solutions sur $]-2;+\infty[$?

La fonction f est strictement croissante sur $]-2;-1,5]$donc $f(x) \le f(-1,5)$ pour tout réel $x \in]-2;-1,5]$.
Alors comme $f(-1,5) = -0,5 < 0$, $f(x) < 0$ pour tout réel $x \in]-2;-1,5]$ et donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-2;-1,5]$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\left[-1;\sqrt{3}-1\right]$donc $f(x) \ge f\left(\sqrt{3}-1\right)$ pour tout réel $x \in \left[-1;\sqrt{3}-1\right]$.
Alors comme $f\left(\sqrt{3}-1\right) > 0,21 > 0$, $f(x) > 0$ pour tout réel $x \in \left[-1;\sqrt{3}-1\right]$ et donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left[-1;\sqrt{3}-1\right]$.

La fonction f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{3}-1;+\infty\right[$ donc $f(x) \ge f\left(\sqrt{3}-1\right)$ et ainsi $f(x) > 0$ pour tout réel $x \in \left[\sqrt{3}-1;+\infty\right[$.
L'équation $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur $\left[\sqrt{3}-1;+\infty\right[$.

Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-1,5;-1[$, et aucune solution sur $]-2;-1,5]$, ni sur $\left[-1;\sqrt{3}-1\right]$ ni sur $\left[\sqrt{3}-1;+\infty\right[$ donc elle admet une unique solution sur $]-2;+\infty[$.

Exercice 2

Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1,4\,v_n - 0,05\,{v_n}^2$.

1. **a.** Justifier le sens de variation de la fonction $f(x) = 1,4\,x - 0,05\,x^2$.

La fonction f est une fonction du second degré dont le coefficient des x^2 est $-0,05 < 0$.
Donc on sait que f est croissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{1,4}{2\times(-0,05)}\right] = \left]-\infty;14\right]$et décroissante sur $[14;+\infty[$.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2 \le v_n \le v_{n+1} \le 8$.

On définit pour n entier naturel, la proposition $Q(n)$: $2 \le v_n \le v_{n+1} \le 8$.
On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$:
On a $v_0 = 2$ d'où $v_1 = 1,4\times2 - 0,05\times2 = 2,6$.
Or on a bien $2 \le 2 \le 2,6 \le 8$ donc $2 \le v_0 \le v_1 \le 8$: la proposition $Q(1)$ est vraie.

Soit n un entier.
On fait l'hypothèse de récurrence, $Q(n)$ est vraie. Alors $2 \le v_n \le v_{n+1} \le 8$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc en particulier que $v_n \in]-\infty;14]$ et $v_{n+1} \in]-\infty;14]$.
Alors comme la fonction f est croissante sur $]-\infty;14]$ et comme on sait par hypothèse de récurrence $2 \le v_n \le v_{n+1} \le 8 < 14$, on en déduit $f(2) \le f(u_n) \le f(u_{n+1}) \le f(8)$.
Par suite, $2,6 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 8$ d'où $2 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 8$: $Q(n+1)$ est vraie.
La proposition $Q(n)$ est donc héréditaire.

La proposition $Q(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire pour $n \geq 0$.
D'après l'axiome de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

On a montré que:
- pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 8$ donc la suite (u_n) est majorée;
- pour tout entier naturel, $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. BONUS: Déterminer la limite de la suite (v_n).

Notons ℓ la limite de la suite (u_n).
On sait alors que:
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,4\, v_n - 0,05\, v_n{}^2 = 1,4\,\ell - 0,05\,\ell^2$.

Alors comme pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1,04\, v_n - 0,05\, v_n{}^2$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 1,4\,\ell - 0,05\,\ell^2$.

Par unicité de la limite, on en déduit que le réel ℓ vérifie l'égalité $\ell = 1,4\,\ell - 0,05\,\ell^2$.

Résolvons donc l'équation $x = 1,4\,x - 0,05\,x^2$.

On obtient $0,05\,x^2 - 0,4\,x = 0$ d'où $\dfrac{1}{20}x(x-8) = 0$.

Par suite $x = 0$ ou $x = 8$.

On en déduit que si (v_n) converge, alors sa limite est ou 0 ou 8.

Remarquons que pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 8$ donc, par passage à la limite, $2 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 8$.

En particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$.

Exercice 3

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel:
- « rand(1; 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1; 50];
- L'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a,b,c,d,e sont des variables du type entier
Initialisation	a:=0 ; b:=0 ; c:=0 ; d:=0 ; e:=0
Traitement	Tant que (a=b) ou (a=c) ou (a=d) ou (a=e) ou (b=c) ou (b=d) ou (b=e) ou (c=d) ou (c=e) ou (d=e) Début du tant que a:=rand(1,50) ; b:=rand(1;50); c:=rand(1,50) ; d:=rand(1,50) e:=rand(1,50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenu avec cet algorithme:

$L_1 = \{2; 11; 44; 2; 15\}$ $\qquad$ $L_2 = \{8; 17; 41; 34; 6\}$
$L_3 = \{12; 17; 23; 17; 50\}$ $\qquad$ $L_4 = \{45; 19; 43; 21; 18\}$

Tant que l'une des variables est égale à une autre, le programme continue de générer des nombres aléatoires pour chacune des variables. Ainsi le "Tant que" s'arrête dès que toutes les variables sont affectées de nombres distincts

Par suite l'ensemble de 5 nombres obtenus doit contenir que des nombres distincts.
Par conséquent, les listes L_1et L_3 ne peuvent être obtenues par le programme. Les listes L_2 et L_4 peuvent être obtenues.

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

Cet algorithme permet de désigner 5 coureurs au hasard parmi les 50 coureurs.
En effet cet algorithme détermine 5 nombres distincts au hasard compris entre 1 et 50 et donc 5 dossards parmi les 50.

2. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.

Comme choisir un coureur au hasard parmi les 50 est une situation d'équiprobabilité, la probabilité qu'un coureur choisi au hasard parmi les 50 subisse le contrôle prévu à cette étape est donnée par

$$\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total}} = \frac{5}{50} = 0,1.$$

Remarque: *une autre façon de voir, à l'apparence plus compliquée, mais qui montre aussi comment utiliser les combinaisons.*

On choisit 5 coureurs parmi 50 coureurs, il y a donc $\binom{50}{5} = 2\,118\,760$ groupes de coureurs différents que l'on peut former à la fin de chaque étape.
À l'issue d'une étape, un coureur parmi les 50 participants subit le contrôle s'il appartient à un groupe de 5 coureurs au hasard.
Il y $\binom{49}{4}$ groupes de 5 coureurs auxquels ce coureur appartient parmi les $\binom{50}{5}$ groupes de 5 coureurs qui peuvent être constitués.
En effet constituer un groupe de 5 coureurs dont un des coureurs est déjà choisi revient à choisir 4 coureurs au hasard parmi les 49 coureurs restants.

La probabilité qu'un coureur soit choisi est donc égale $\dfrac{\binom{49}{4}}{\binom{50}{5}} = \dfrac{\frac{49\times48\times47\times46}{1\times2\times3\times4}}{\frac{50\times49\times48\times47\times46}{1\times2\times3\times4\times5}} = \dfrac{5}{50} = \dfrac{1}{10} = 0,1.$

3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

On sait qu'un coureur a la probabilité $0,1$ de subir le contrôle à chaque étape.
Cette expérience aléatoire est une expérience à 2 issues dont la probabilité de subir le contrôle est $0,1$.
Les désignations des coureurs à l'issue de chaque étape sont indépendantes.
Par suite l'expérience aléatoire qui consiste à choisir au hasard un même coureur sur l'ensemble des 10 étapes est la répétition indépendante de 10 épreuves de Bernoulli. C'est donc un schéma de Bernoulli.
Par suite la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course suit une loi binomiale de paramètres 10 et $0,1$.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course.
Calculer sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants:
- il a été contrôlé 5 fois exactement;
- il n'a pas été contrôlé;
- il a été contrôlé au moins une fois.

L'événement « le coureur a été contrôlé 5 fois exactement » est l'événement $(X = 5)$ et donc

$$p(X=5) = \binom{10}{5}\times 0,1^5 \times (1-0,9)^5 = 252\times\frac{9^5}{10^{10}} \approx 0,0015\ .$$

L'événement « le coureur n'a pas été contrôlé » est l'événement $(X = 0)$ d'où $p(X = 0) = 0,9^{10} \approx 0,3487$.

L'événement « le coureur a été contrôlé au moins une fois » est l'événement $(X \geq 1)$ égal à l'événement $\overline{(X = 0)}$ donc $p(X \geq 1) = 1 - 0,9^{10} = 0,6513$.

Exercice 3

1.a. Tant que l'une des variables est égale à une autre, le programme continue de générer des nombres aléatoires pour chacune des variables. Ainsi le "Tant que" s'arrête dès que toutes les variables sont affectées de nombres distincts.
Par suite l'ensemble de 5 nombres obtenus doit contenir que des nombres distincts.
Par conséquent, les listes L_1et L_3 ne peuvent être obtenues par le programme. Les listes L_2 et L_4 peuvent être obtenues.

b. Cet algorithme permet de désigner 5 coureurs au hasard parmi les 50 coureurs.
En effet cet algorithme détermine 5 nombres distincts au hasard compris entre 1 et 50 et donc 5 dossards parmi les 50.

2.

On choisit 5 coureurs parmi 50 coureurs, il y a donc $\binom{50}{5} = 2\,118\,760$ groupes de coureurs différents que l'on peut former à la fin de chaque étape.
À l'issue d'une étape, un coureur parmi les 50 participants subit le contrôle s'il appartient à un groupe de 5 coureurs au hasard.
Il y $\binom{49}{4}$ groupes de 5 coureurs auxquels ce coureur appartient parmi les $\binom{50}{5}$ groupes de 5 coureurs qui peuvent être constitués.
En effet constituer un groupe de 5 coureurs dont un des coureurs est déjà choisi revient à choisir 4 coureurs au hasard parmi les 49 coureurs restants.

La probabilité qu'un coureur soit choisi est donc égale $\dfrac{\binom{49}{4}}{\binom{50}{5}} = \dfrac{\frac{49\times48\times47\times46}{1\times2\times3\times4}}{\frac{50\times49\times48\times47\times46}{1\times2\times3\times4\times5}} = \dfrac{5}{50} = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

3.a. On sait qu'un coureur a la probabilité $0,1$ de subir le contrôle à chaque étape.
Cette expérience aléatoire est une expérience à 2 issues dont la probabilité de subir le contrôle est $0,1$.
Les désignations des coureurs à l'issue de chaque étape sont indépendantes.
Par suite l'expérience aléatoire qui consiste à choisir au hasard un même coureur sur l'ensemble des 10 étapes est la répétition indépendante de 10 épreuves de Bernoulli. C'est donc un schéma de Bernoulli.
Par suite la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course suit une loi binomiale de paramètres 10 et $0,1$.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course.
L'événement « le coureur a été contrôlé 5 fois exactement » est l'événement $(X = 5)$ et donc

$p(X = 5) = \binom{10}{5}\times 0,1^5 \times (1-0,9)^5 = 252\times \dfrac{9^5}{10^{10}} \approx 0,0015$.

L'événement « le coureur n'a pas été contrôlé » est l'événement $(X = 0)$ d'où $p(X = 0) = 0,9^{10} \approx 0,3487$.

L'événement « le coureur a été contrôlé au moins une fois » est l'événement $(X \geq 1)$ égal à l'événement $\overline{(X = 0)}$ donc $p(X \geq 1) = 1 - 0,9^{10} = 0,6513$.

Exercice 4

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S »;
- soit malade (atteint par le virus);
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu' en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu' en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

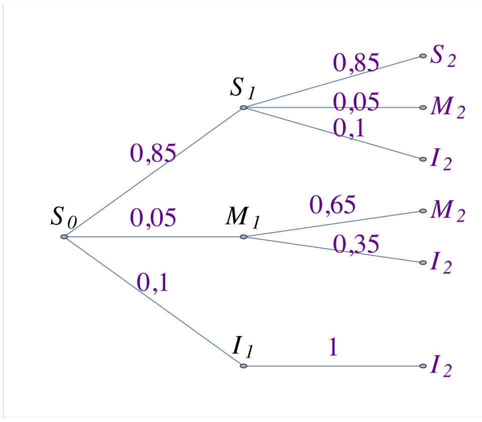
- S_n :« l'individu est de type S en semaine n »;
- M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
- I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes: $p(S_0) = 1$; $p(M_0) = 0$ et $p(I_0) = 0$.

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous:



2. Montrer que $p(I_2)$ =0,2025.

Comme S_1, M_1 et I_1 forment une partition de l'univers (en effet aucun individu peut être à la fois de type S et malade ou malade et immunisé, ou ..., la même semaine, et un individu appartient forcément à l'un des trois groupes).
D'après la formule des probbabilités totales, on obtient alors:

$$p(I_2) = p(I_2 \cap I_1) + p(I_2 \cap M_1) + p(I_2 \cap I_1)$$

D'où

$$p(I_2) = p(S_1)\, p_{S_1}(I_2) + p(M_1)\, p_{M_1}(I_2) + p(I_1)\, p_{I_1}(I_2).$$

Or:

- $p_{S_1}(I_2) = 0,1$: 10% des individu de type S une semaine donnée, deviennent immunisés la semaine suivante;
- $p_{M_1}(I_2) = 0,35$: 35% des individu malade une semaine donnée, deviennent immunisés la semaine suivante;
- $p_{I_1}(I_2) = 1$: tous les individus immunisés une semaine donnée, restent immunisés la semaine suivante;
- $p(S_1) = 0,85$, $p(M_1) = 0,05$ et $p(I_1) = 0,1$.

En effet comme la semaine 0, tous les individus sont de type S, alors on a par exemple:

$$p(S_1) = p(S_0)\, p_{S_0}(S_1) = 1 \times 0,85 = 0,85.$$

Finalement $p(I_2) = 0,85 \times 0,1 + 0,05 \times 0,35 + 0,1 \times 1 = 0,2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième qu'il ait été malade en semaine 1 ?

On détermine $p_{I_2}(M_1)$.

On a $p_{I_2}(M_1) = \dfrac{p(I_2 \cap M_1)}{p(I_2)} = \dfrac{0,0175}{0,2025} = 0,0864$ arrondie au millième.

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on note: $u_n = p(S_n)$; $v_n = p(M_n)$ et $w_n = p(I_n)$, les probabilités respectives des événements S_n; M_n et I_n.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, on a $u_n + v_n + w_n = 1$.

Pour tout entier naturel n, S_n, M_n et I_n forment une partition de l'univers.
En effet, une semaine donnée, un individu est d'un des 3 types et d'un seulement. Ainsi S_n, M_n et I_n recouvrent

l'univers des possibles Ω: $S_n \cup M_n \cup I_n = \Omega$ et S_n, M_n et I_n sont deux à deux incompatibles: $\begin{cases} S_n \cap M_n = \emptyset \\ S_n \cap I_n = \emptyset \\ M_n \cap I_n = \emptyset \end{cases}$.

Par suite $p(\Omega) = p(S_n \cup M_n \cup I_n) = p(S_n) + p(M_n) + p(I_n)$ d'où $1 = u_n + v_n + w_n$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65\, v_n + 0,05\, u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n); (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

On a saisit: " = 0,65 ∗ C2 + 0,05 ∗ B2 ".

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N , appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

On lit dans le tableur que: $v_0 \le v_1 \le v_2 \le v_3 \le \ldots \le v_5 \le v_6$ puis que $v_6 \ge v_7 \ge v_8 \ge \ldots \ge v_{22}$.
On en déduit donc que la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle est $n = 6$.
La probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande la sixième semaine selon ce modèle.

3. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,85\, u_n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

On a montré que S_n, M_n et I_n forment une partition de l'univers. Par suite:

$$p(S_{n+1}) = p(S_n \cap S_{n+1}) + p(M_n \cap S_{n+1}) + p(I_n \cap S_{n+1})$$

D'où

$$p(S_{n+1}) = p(S_n)\, p_{S_n}(S_{n+1}) + p(M_n)\, p_{M_n}(S_{n+1}) + p(I_n)\, p_{I_n}(S_{n+1}).$$

Or

- $p_{S_n}(S_{n+1}) = 0,85$ (85% des individus de type S restent de type S);
- $p_{M_n}(S_{n+1}) = 0$ (aucun individu malade ne devient de type S);
- $p_{I_n}(S_{n+1}) = 0$ (aucun individu immunisé ne devient de type S).

Par conséquent, comme $u_{n+1} = p(S_{n+1})$ et $u_n = p(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = p(I_n)$, on obtient:

$$u_{n+1} = 0,85\, u_n + 0\, v_n + 0\, w_n$$
$$u_{n+1} = 0,85\, u_n.$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison 0, 85 et de premier terme $u_0 = 1$.
Par suite, on sait que pour tout entier naturel n, $u_n = 0,85^n$.

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$.

On définit pour n entier naturel la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$ ".

On a d'une part $v_0 = 0$ et d'autre part $\frac{1}{4}\left(0,85^0 - 0,65^0\right) = \frac{1}{4}(1-1) = 0$ donc $v_0 = \frac{1}{4}\left(0,85^0 - 0,65^0\right)$.

La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit n un entier naturel.

On fait l'hypothèse de récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$.

On sait que $v_{n+1} = 0,65\, v_n + 0,05\, u_n$.
Or

- $u_n = 0,85^n$ (question précédente);
- $v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$ (hypothèse de récurrence)

Donc on en déduit:

$$v_{n+1} = 0,65 \times \left(\frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)\right) + 0,05 \times 0,85^n$$

$$v_{n+1} = 0,65 \times \frac{1}{4} \times 0,85^n - 0,65 \times \frac{1}{4} \times 0,65^n + 0,05 \times 0,85^n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}\left(0,85^n\,(0,65 + 4 \times 0,05) - 0,65^{n+1}\right)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}\left(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}\right).$$

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. La proposition $\mathcal{P}(n)$ est donc héréditaire.

La proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour $n \geq 0$.
D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n.

Ainsi pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$.

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n); (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

On a $0 < 0,85 < 1$ et $0 < 0,65 < 1$ donc on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,65^n = 0$.

Par suite, on en déduit:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$;
- par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right) = 0$
- comme pour tout entier naturel n, $u_n + v_n + w_n = 1$, on obtient $w_n = 1 - u_n - v_n$ et donc par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$.

À long terme, tous les individus sont immunisés.