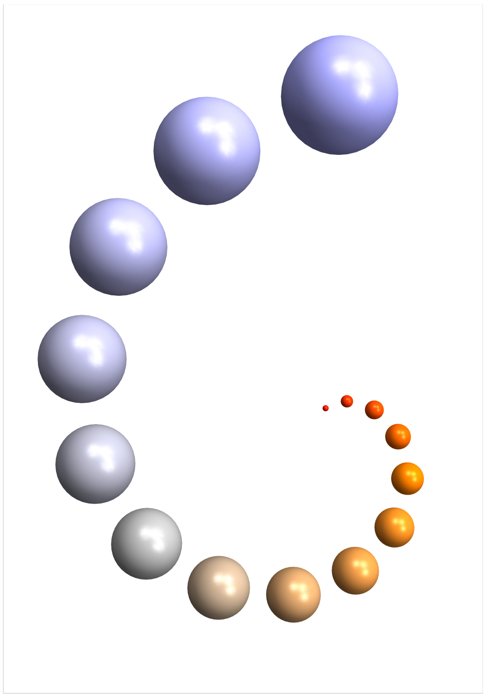
Devoir surveillé n°3

Mathématiques, Série S

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Le candidat doit traiter toutes les questions, dans l'ordre qui lui sied, à condition d'indiquer clairement sur la copie le numéro de l'exercice.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Toute trace de recherche, même infructueuse ou incomplète sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Durée: 2 heures — Jeudi 30 novembre 2017



Exercice 1 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+2}{x+2}$.

1. **a.** Calculer la dérivée $f'(x)$ de f. Montrer que $f'(x)=\dfrac{4(x+1)\left(x^2+2x-2\right)}{(x+2)^2}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $]-2;+\infty[$.

2. **a.** Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-1,5;-1[$.

   b. Donner un valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

   c. L'équation $f(x)=0$ admet-elle d'autres solutions sur $]-2;+\infty[$?

Exercice 2 (4 points)

Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1,4\,v_n - 0,05\,{v_n}^2$.

1. **a.** Justifier le sens de variation de la fonction $f(x) = 1,4\,x - 0,05\,x^2$.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

3. BONUS: Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 3 (5 points)

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel:
– « rand(1; 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1; 50];
– L'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a,b,c,d,e sont des variables du type entier
Initialisation	a:=0 ; b:=0 ; c:=0 ; d:=0 ; e:=0
Traitement	Tant que (a=b) ou (a=c) ou (a=d) ou (a=e) ou (b=c) ou (b=d) ou (b=e) ou (c=d) ou (c=e) ou (d=e) Début du tant que a:=rand(1,50) ; b:=rand(1;50); c:=rand(1,50) ; d:=rand(1,50) e:=rand(1,50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenu avec cet algorithme:

$L_1 = \{2; 11; 44; 2; 15\}$ $\qquad L_2 = \{8; 17; 41; 34; 6\}$
$L_3 = \{12; 17; 23; 17; 50\}$ $\qquad L_4 = \{45; 19; 43; 21; 18\}$

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

2. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.

3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course.
Calculer sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants:
– il a été contrôlé 5 fois exactement;
– il n'a pas été contrôlé;
– il a été contrôlé au moins une fois.

Exercice 4 (7 points)

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S »;
- soit malade (atteint par le virus);
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu' en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu' en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

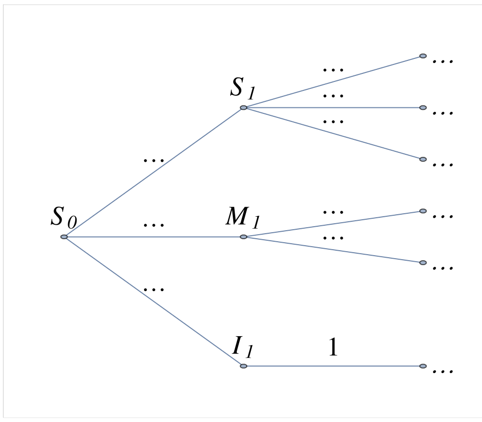
– S_n :« l'individu est de type S en semaine n »;
– M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
– I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes:
$p(S_0) = 1$; $p(M_0) = 0$ et $p(I_0) = 0$.

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous:



2. Montrer que $p(I_2)$ =0,2025.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on note: $u_n = p(S_n)$; $v_n = p(M_n)$ et $w_n = p(I_n)$, les probabilités respectives des événements S_n; M_n et I_n.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, on a $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65\, v_n + 0,05\, u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n); (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N , appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,85\, u_n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$.

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n); (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?