Devoir surveillé n°4
Éléments de solutions

Exercice

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré
que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A: premier modèle-avec une suite (7 points)

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante:
$u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100$.

1. a. Expliquer pourquoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_0.

On note u_n la masse en grammes des bactéries dans le milieu nutritif au bout de n jours de mise en place du dispositif, après le remplacement du milieu nutritif.
Ainsi comme on introduit initialement 1 kg = 1000 g, la masse en grammes de bactéries pour $n = 0$ est donnée par $u_0 = 1000$.

Ensuite, on sait que la quantité de bactéries augmente chaque jour de 20%, ainsi la masse de bactéries au jour $n+1$ avant le remplacement du milieu nutritif est donnée par $\left(1+\dfrac{20}{100}\right)\times u_n = 1,2\,u_n$.
Alors comme on perd 100 g lors du remplacement du milieu nutritif, on en déduit que la masse de bactéries au jour $n+1$ après le remplacement du milieu nutritif est $u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100$.

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

On obtient les valeurs de u_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	1000.0	1100.0	1220.0	1364.0	1536.8	1744.2	1993.0	2291.6	2649.9	3079.9
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
u_n	3595.9	4215.0	4958.1	5849.7	6919.6	8203.5	9744.2	11 593.	13 812.	16 474.
n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
u_n	19 669.	23 503.	28 103.	33 624.	40 248.	48 198.	57 738.	69 185.	82 922.	99 407.

On lit que $u_n < 30\,000$ pour $n < 23$ et $u_n \geq 30\,000$ pour $n \geq 23$.
On en déduit qu'il faudra 23 jours à l'entreprise pour réaliser son objectif.

c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé à la question précédente. Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1000 n prend la valeur 0 Tant que .... faire u prend la valeur .... n prend la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher ....

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1000 n prend la valeur 0 Tant que $u < 30000$ faire u prend la valeur $1{,}2 \times u - 100$ n prend la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.

On définit pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$: $u_n \geq 1000$.

On sait que $u_0 = 1000$ donc $u_0 \geq 1000$: la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Soit n un entier, $n \geq 0$.
On fait l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie: on a donc $u_n \geq 1000$.

Comme par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1000$, et comme $1,2 > 0$ alors:
$1,2\,u_n \geq 1,2 \times 1000$
$1,2\,u_n - 100 \geq 1200 - 100$
$1,2\,u_n - 100 \geq 1100$
$u_{n+1} \geq 1100 \geq 1000$
Par suite la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La proposition $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et est héréditaire pour $n \geq 0$.
D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n.
Finalement $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1000$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 1,2\,u_n - 100 - u_n = 0,2\,u_n - 100$.
Or d'après la question précédente, $u_n \geq 1000$, donc $0,2\,u_n \geq 200$ et finalement $0,2\,u_n - 100 \geq 100 > 0$.
Par conséquent $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

3. On définit la suite (v_n) par: pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2\,u_n - 100 - 500 = 1,2\,u_n - 1,2 \times 500 = 1,2\,v_n$.
Par conséquent la suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 500$.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Comme la suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 de premier terme $v_0 = 500$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = 500 \times 1,2^n$.
Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$ alors $u_n = v_n + 500 = 500 \times 1,2^n + 500 = 500\,(1,2^n + 1)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Comme $1,2 > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,2^n = +\infty$, ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,2^n + 1 = +\infty$ et enfin comme $500 > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Partie B: second modèle-avec une fonction (8 points)

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par:

$f(t) = \dfrac{50}{1 + 49\, e^{-0,2\,t}}$, où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimé en kg, de bactéries au temps t.

1. **a.** Calculer $f(0)$.

On a $f(0) = \dfrac{50}{1 + 49\, e^{-0,2\times 0}} = \dfrac{50}{1+49} = 1$.

b. Démontrer que pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) < 50$.

On sait que pour tout réel a, $e^a > 0$ donc pour tout réel $t \geq 0$, $e^{-0,2\,t} > 0$ ainsi $1 + 49\, e^{-0,2\,t} > 1 > 0$.
Par conséquent $0 < \dfrac{1}{1 + 49^{e^{-0,2\,t}}} < 1$ et comme $50 > 0$, $f(t) < 50$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction f.

Pour tout réel $t \geq 0$, $f'(t) = -50 \times \left(-0,2 \times 49\, e^{-0,2\,t}\right) \times \dfrac{1}{\left(1 + 49\, e^{-0,2\,t}\right)^2} = \dfrac{490\, e^{-0,2\,t}}{\left(1 + 49\, e^{-0,2\,t}\right)^2}$.

Remarque: on reconnaît le modèle $50 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u = 1 + 49\, e^{-0,2\,t}$.

On a vérifié que $\forall\, t \in \left[0; +\infty\right[$, $e^{-0,2\,t} > 0$ donc comme un carré est toujours positif et comme $490 > 0$, on obtient que $f'(t) > 0$.
Finalement la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

d. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50$.

En effet, on sait que $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -0,2\,t = -\infty \text{ car } -0,2 < 0 \\ \lim\limits_{X\longrightarrow-\infty} e^X = 0 \end{cases}$ d'où par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,2\,t} = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} 1 + 49\, e^{-0,2\,t} = 1 \neq 0$.
Finalement par inverse, $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} f(t) = 50$.

2. Interpréter les résultats de la question **1.** par rapport au contexte.

Pour **1.a.** : $f(0)$ représente la quantité de bactéries à l'instant $t = 0$. On retrouve la quantité initiale de 1 kg.

Pour **1.b.** : la quantité de bactéries ne dépasse jamais 50 kg.

Pour **1.c.** : la quantité de bactéries dans le milieu, est toujours en augmentation.

Pour **1.d.** : après de nombreux jours de cultures, la quantité de bactéries présentes dans le milieu nutritif est à peu près égale à 50 kg.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

a. Démontrer que l'équation $f(t) = 30$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
De plus on a:

- $f(0) = 1$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50$

Donc f est à valeurs dans $[1; 50[$.

Finalement comme $30 \in [1; 50[$, on sait que l'équation $f(t) = 30$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution. Conclure quant au problème posé à la question **A.1.b.**

Notons τ l'unique solution définie à la question précédente.

- $f(21) \approx 28,8 < 30$ et $f(22) \approx 31,2 > 30$ donc $21 < \tau < 22$
- $f(21,4) \approx 29,79 < 30$ et $f(21,5) \approx 30,03$ donc $21,4 < \tau < 21,5$
- $f(21,48) \approx 29,98 < 30$ et $f(21,49) \approx 30,009$ donc $21,48 < \tau < 21,49$.

Par suite $\tau = 21,5$ à 10^{-1} près.

On en déduit que, suivant ce modèle, l'entreprise aura atteint son objectif de produire 30 kg de bactéries après 21 jours et demi de mise en culture.

Partie C: un contrôle de qualité (5 points)

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.
L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.
Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production.
On admet que la quantité de bactéries est suffisamment grande pour qu'un tel prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. On note X la variable aléatoire qui compte parmi les 200 bactéries prélevées le nombre de bactéries de type A. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

L'expérience aléatoire qui consiste à choisir une bactérie de type A est une expérience aléatoire à deux issues dont la probabilité de succès est $p = 0,8$, puisque 80% des bactéries produites sont de type A.
Ainsi l'expérience aléatoire qui consiste à choisir 200 bactéries de type A est la répétition de 200 expériences aléatoires à 2 issues indépendantes et identiques, puisque le prélèvement peut être associé à un tirage avec remise.
On sait donc que la variable aléatoire X qui compte le nombre de bactéries de type A parmi les 200 prélevées suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,8.

2. **a.** Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $p(X = 146)$.

On a $p(X = 146) = \binom{200}{146} 0,8^{146}(1-0,8)^{200-146} \approx 0,004$ à 10^{-3} près.

b. Calculer $E(X)$. Interpréter pour le contexte.

On a $E(X) = 200 \times 0,8 = 160$.
En moyenne, on devrait compter 160 bactéries de type A parmi les 200 prélevées.

3. On donne le tableau (tronqué) suivant pour la loi de X (valeurs arrondies à 10^{-4}).

Valeur de X:	0	…	147	148	149	…	160	…	170	171	172	..
$p(X=k)$	0	…	0,0055	0,0078	0,0109	…	0,0704	…	0,0147	0,0103	0,0069	..
$p(X\leq k)$=	0	…	0,0157	0,0235	0,0345	…	0,5282	…	0,9717	0,9821	0,9890	..

L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.
À la lecture du tableau, l'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause?

Indication: on pourra déterminer les entiers a et b tels que $p(a \leq X \leq b) \geq 0,95$.

On lit dans le tableau que:
- $p(X \leq 148) = 0,0235 < 0,025$ et $p(X \leq 149) > 0,025$
- $p(X \leq 171) \approx 0,9821 > 0,975$ ($= 1 - 0,025$) et $p(170) < 0,975$

Par suite, on a $p(148 \leq X \leq 171) \geq 0,95$.
On en déduit que dans 95% des cas, on compte plus de 148 bactéries de type A dans un prélèvement de 200 bactéries.
Par suite, l'affirmation de l'entreprise peut être remise en cause.