

# Devoir surveillé n°4

## Mathématiques, Série S

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter toutes les questions, dans l'ordre qui lui sied, à condition d'indiquer clairement sur la copie le numéro de l'exercice.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Toute trace de recherche, même infructueuse ou incomplète sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

21 décembre 2017

### Exercice

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant.

Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

*Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

#### Partie A: premier modèle-avec une suite (7 points)

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (un) définie de la façon suivante:

$u_0 = 1000$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 1,2 u_n - 100$ .

1. a. Expliquer pourquoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente  $u_0$ .

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé à la question précédente. Recopier et compléter cet algorithme.

|                   |                                                                                                                                                       |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Variables</b>  | $u$ et $n$ sont des nombres                                                                                                                           |
| <b>Traitement</b> | $u$ prend la valeur 1000<br>$n$ prend la valeur 0<br>Tant que ..... faire<br>$u$ prend la valeur .....<br>$n$ prend la valeur $n + 1$<br>Fin Tant que |
| <b>Sortie</b>     | Afficher .....                                                                                                                                        |

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1000$ .

b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

3. On définit la suite  $(v_n)$  par: pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 500$ .

a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique.

b. Exprimer  $v_n$ , puis  $u_n$ , en fonction de  $n$ .

c. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Partie B: second modèle-avec une fonction (8 points)

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par:

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49e^{-0.2t}}, \text{ où } t \text{ représente le temps exprimé en jours et où } f(t) \text{ représente la masse, exprimé en kg, de}$$

bactéries au temps  $t$ .

1. a. Calculer  $f(0)$ .  
b. Démontrer que pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $f(t) < 50$ .  
c. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .  
d. Donner la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Interpréter les résultats de la question 1. par rapport au contexte.
3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
  - a. Démontrer que l'équation  $f(t) = 30$  admet une unique solution sur  $[0; +\infty[$ .
  - b. Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de cette solution. Conclure quant au problème posé à la question A.1.b.

## Partie C: un contrôle de qualité (5 points)

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production.

On admet que la quantité de bactéries est suffisamment grande pour qu'un tel prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. On note  $X$  la variable aléatoire qui compte parmi les 200 bactéries prélevées le nombre de bactéries de type A. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. a. Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $p(X = 146)$ .  
b. Calculer  $E(X)$ . Interpréter pour le contexte.

3. On donne le tableau (tronqué) suivant pour la loi de  $X$  (valeurs arrondies à  $10^{-4}$ ).

|                 |   |     |        |        |        |     |        |     |        |        |        |    |
|-----------------|---|-----|--------|--------|--------|-----|--------|-----|--------|--------|--------|----|
| Valeur de $X$ : | 0 | ... | 147    | 148    | 149    | ... | 160    | ... | 170    | 171    | 172    | .. |
| $p(X=k)$        | 0 | ... | 0,0055 | 0,0078 | 0,0109 | ... | 0,0704 | ... | 0,0147 | 0,0103 | 0,0069 | .. |
| $p(X \leq k)$   | 0 | ... | 0,0157 | 0,0235 | 0,0345 | ... | 0,5282 | ... | 0,9717 | 0,9821 | 0,9890 | .. |

L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.

À la lecture du tableau, l'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause?

**Indication:** on pourra déterminer les entiers  $a$  et  $b$  tels que  $p(a \leq X \leq b) \geq 0,95$ .