Devoir surveillé n°5

Éléments de solution

Exercice 1 (5 points)

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.
L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A- Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1[$ par :
$f(x) = 30\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)$, où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'age en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 1[$.

Pour tout réel $x \in]0; 1[$, $f'(x) = 30 \times \dfrac{\dfrac{20(1-x) - 20x \times (-1)}{(1-x)^2}}{\dfrac{20x}{1-x}}$ d'où $f'(x) = \dfrac{20}{1-x^2} \times \dfrac{1-x}{20x} = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

Or pour tout réel $x \in]0; 1[$, on a $0 < x < 1$ et $0 < 1 - x < 1$ donc $\dfrac{1}{x(1-x)} > 0$.
Par suite $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $]0; 1[$.

2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Résolvons les équations $f(x) = 20$ et $f(x) = 150$. On obtient:

$f(x) = 20$	$f(x) = 150$
$30\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = 20$	$30\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = 150$
$\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = \dfrac{2}{3}$	$\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = 5$

Comme les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre,

$\dfrac{20x}{1-x} = e^{\frac{2}{3}}$	$\dfrac{20x}{1-x} = e^5$
$\dfrac{20x - e^{\frac{2}{3}}(1-x)}{1-x} = 0$	$\dfrac{20x - e^5(1-x)}{1-x} = 0$

Alors, comme pour $x \in]0; 1[$, $1 - x \neq 0$, il vient:

$\left(20 + e^{\frac{2}{3}}\right)x - e^{\frac{2}{3}} = 0$	$\left(20 + e^5\right)x - e^5 = 0$

Finalement

$x = \dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}}$	$x = \dfrac{e^5}{20 + e^5}$
$x \approx 0,09$	$x \approx 0,88$

On en déduit que les valeurs du diamètre x du tronc pour rester conforme aux conditions de validité sont compris entre 0,09 m et 0,8 m c'est à dire 9 cm et 80 cm.
(C'est une conséquence de la monotonie.)

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par années)		0,22	0,245	0,25								

1. **a.** Interpréter le nombre $0,245$ dans la cellule D3.

On a $0,245 = \dfrac{18,05 - 15,6}{80 - 70}$. Ainsi on a calculé la vitesse moyenne de croissance sur les dix années entre l'âge 70 et l'âge 80 de l'épicéa.

b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?

On entre la formule "$=\dfrac{C2 - B2}{C1 - B1}$".

2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.

Un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm $= 0,27$ m, a atteint l'âge de $f(0,27) = 60,03$ ans.
On sait qu'un arbre de 50 ans atteint une hauteur de 11,2 m.
De plus entre 50 et 70 ans la hauteur de l'arbre à une vitesse de croissance de 0,22 mètres par années.
Ainsi entre 50 et 60 ans, la hauteur de l'arbre aura augmentée de $10 \times 0,22 = 2,2$ mètres.
Par suite la hauteur attendue d'un tel épicéa est $11,2 + 2,2 = 13,4$ m.

3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.

a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.

On complète le tableau donnant la vitesse de croissance.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par années)		0,22	0,245	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,1675

On lit dans le tableau que l'intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure est $[80; 95]$.
En effet, à partir de 80 ans jusqu'à 95 ans la vitesse de croissance est maximale égale à $0,25$.

b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Les diamètres des troncs pour des arbres dont l'âge est compris entre 80 et 95 ans sont compris entre l'antécédent de 80 et l'antécédent de 95 par la fonction f de la partie A.

On obtient que $f(x) = 80$ pour $x_{80} = \dfrac{e^{\frac{8}{3}}}{20 + e^{\frac{8}{3}}} \approx 0,42$ et $f(x) = 95$ pour $x_{95} = \dfrac{e^{\frac{19}{6}}}{20 + e^{\frac{19}{6}}} \approx 0,54$.

Or $f(0,7) \approx 115,3$.
Donc les bûcherons coupent des arbres dont l'âge est d'environ 115 ans.
Du point de vue de la qualité du bois, cela ne semble pas trop cohérent de couper les arbres de cette taille.
Néanmoins remarquons que ce n'est qu'entre 110 et 120 ans que la vitesse de croissance commence à diminuer sérieusement.
Ainsi, les bûcherons coupent les arbres quand ils commencent à perdre de manière significative en vitesse de croissance.

Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. toutefois, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Proposition: Pour tout complexe z, $\mathrm{Re}(z^2) = (\mathrm{Re}(z))^2$.

On a par exemple, pour $z = 1 + i$, $z^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$.
Alors on a $(\mathrm{Re}(z))^2 = 1^2 = 1$ et $\mathrm{Re}(z^2) = 0$ donc $\mathrm{Re}(z^2) \neq (\mathrm{Re}(z))^2$.
La proposition est FAUSSE.

2. Proposition: Le point d'affixe $(-1+i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.

On a:

$$(-1+i)^2 = -2i$$
$$(-1+i)^3 = -2i \times (-1+i) = 2 + 2i$$
$$(-1+i)^4 = (-2i)^2 = -4$$

Alors comme $(-1+i)^{10} = \left((-1+i)^4\right)^2 (-1+i)^2 = (-4)^2 \times (-2i) = -32i$ et ainsi le point d'affixe $(-1+i)^{10}$ est bien un point de l'axe des imaginaires.
La proposition est VRAIE.

3. Proposition: Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \overline{z} + 2 - 4i = 0$ admet une solution unique.

On pose $z = x + iy$, avec x et y des réels.
Alors l'équation s'écrit $(x+iy) - \overline{(x+iy)} + 2 - 4i = 0$ d'où $x + iy + x - iy + 2 - 4i = 0$ et finalement $(2x+2) + i(-4) = 0$.
Il faut donc $\begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ -4 = 0 \end{cases}$. Ce système n'a pas de solution.
L'équation $z - \overline{z} + 2 - 4i = 0$ n'a donc pas de solution.

La proposition est FAUSSE.

4. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}; \vec{v}\right)$. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $a = 2 + 2i$, $b = -\sqrt{3} + i$, $c = 1 + i\sqrt{3}$,

Proposition: les points A, B et C sont alignés.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, par exemple, sont colinéaires.

Or on a:

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right) - (2+2i)}{\left(-\sqrt{3} + i\right) - (2+2i)} \qquad \text{(on substitue par les valeurs)}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)}{\left(-2 - \sqrt{3}\right) - i} \qquad \text{(on rassemble les parties réelles et imaginaires)}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\left(-1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)\right)\left(\left(-2 - \sqrt{3}\right) + i\right)}{\left(-2 - \sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\left[(-1)\left(-2 - \sqrt{3}\right) + i^2\left(\sqrt{3} - 2\right)\right] + i\left[\left(-2 + \sqrt{3}\right)\left(-2 - \sqrt{3}\right) - 1\right]}{9 + 4\sqrt{3}}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\left[2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\right] + i\left[(-2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1\right]}{9 + 4\sqrt{3}}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{4}{9+4\sqrt{3}}$$

Finalement $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ et donc 0n en déduit $\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \in \mathbb{R}$ et donc il existe un réel k non nul, tel que $z_{\overrightarrow{AC}} = k\, z_{\overrightarrow{AB}}$ c'est à dire tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires.
Les points A, B et C sont alignés.
La proposition est VRAIE.

5. Soit j le nombre complexe tel que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition: $1 + j + \frac{1}{j} = 0$.

On calcule $1 + j + \frac{1}{j}$.

On a: $1 + j + \frac{1}{j} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

La proposition est VRAIE.

Exercice 3

Soit f la fonction dérivable, définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 e^x - 1$.
Étudier le sens de variation de la fonction g.

Pour tout réel x, on a $g'(x) = 2x \times e^x + x^2 e^x - 0 = x(x+2)e^x$.

Or pour tout réel $x > 0$, $\begin{cases} x > 0 \\ x + 2 \geq 2 > 0 \\ e^x > 0 \end{cases}$ donc $g'(x) > 0$.

La fonction g est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b. Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Démontrer que α appartient à l'intervalle $[0,703\ ;\ 0,704]$.

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$.
De plus $g(0) = 0^2 \times e^0 - 1 = -1 < 0$ et $g(1) = 1^2 \times e^1 - 1 = e - 1 > 0$.
Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction strictement monotone, on sait que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.

De plus comme la fonction g est strictement croissante sur $[1; +\infty[\subset [0; +\infty[$ donc pour tout réel $x \geq 1$, $g(x) \geq g(1)$ d'où $g(x) \geq e - 1 > 0$.
L'équation $g(x) = 0$ n'a donc pas de solution sur $[1; +\infty[$.
Par suite, l'équation $g(x) = 0$ admet le réel $\alpha \in [0; 1]$ comme unique solution sur $[0; +\infty[$.

On a $g(0,703) \approx -0,0018 < 0$ et $g(0,704) \approx 0,002 > 0$ donc $\alpha \in [0,703; 0,704]$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

On sait que la fonction g est croissante sur $[0; \alpha]$ et sur $[\alpha; +\infty[$.
Par suite,

- pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq \alpha$, $g(x) \leq g(\alpha)$ d'où $g(x) \leq 0$;

• pour tout réel $x \geq \alpha$, $g(x) \geq g(\alpha)$ d'où $g(x) \geq 0$.

2. Étude de la fonction *f*.

a. Donner les limites de f en 0 et en $+\infty$.

On a $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

En effet, on sait que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} e^x = e^0$ (par continuité) donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} e^x + \frac{1}{x} = +\infty$.
En $+\infty$, on sait que $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} e^x + \frac{1}{x} = +\infty$.

b. On note f' la fonction dérivée de f sur $]\,0; +\infty[$.

Justifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

On a pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = e^x + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{x^2\, e^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]\,0; +\infty[$.

On sait que $x^2 > 0$ pour tout réel $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]\,0; +\infty[$.
D'après la question 1., on obtient donc que $f'(x) < 0$ pour $0 < x < \alpha$ et $f'(x) > 0$ pour $x > \alpha$.
Par suite f est décroissante sur $]\,0; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
On obtient le tableau de variation:

x	0		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\vert$	$-$		$+$	
Variations de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.

La fonction f est décroissante sur $]\,0; \alpha]$ donc $f(x) \geq f(\alpha)$ pour $0 < x < \alpha$ et f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$ donc $f(x) \geq f(\alpha)$ pour $x \geq \alpha$.
Dans tous les cas $f(x) \geq f(\alpha)$.
Donc f admet $m = f(\alpha)$ pour minimum atteint en $x = \alpha$.

On sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2\, e^\alpha - 1 = 0$ d'où $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2}$.

Alors comme $f(\alpha) = e^\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$, on obtient $m = f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.

e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

On sait que $0,703 \leq \alpha \leq 0,704$ donc $\dfrac{1}{0,704} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{0,703}$ d'où $\dfrac{1}{0,704^2} < \dfrac{1}{\alpha^2} < \dfrac{1}{0,703^2}$ et finalement,
$\dfrac{1}{0,704^2} + \dfrac{1}{0,704} < m < \dfrac{1}{0,703^2} + \dfrac{1}{0,703}$.
Finalement, $3,43814 < m < 3,44591$ et donc $3,43 < m < 3,45$.

Exercice 4 (5 points)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile.
Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

Variables	a, b, d, s sont des entiers
	i, n des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 0
	Saisir n
Traitement	Pour i allant de 1 à n faire
	| d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
	| Si $d \leq 2$
	| | Alors a prend la valeur $1 - a$
	| | Sinon Si $d \leq 4$
	| | |Alors b prend la valeur $1 - b$
	| | FinSi
	| FinSi
	s prend la valeur $a + b$
	FinPour
Variables	Afficher s

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.
Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

Variables	i	d	a	b	s
Initialisation			**0**	**0**	
1^er passage boucle pour	**1(≤2)**	**1**	**1−0=1**	**0**	**1+0=1**
2^e passage boucle pour	**2**	**6(>4)**	**1**	**0**	**1**
3^e passage boucle pour	**3**	**4(2≤&≤4)**	**1**	**1−0=1**	**1+1=2**

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

En effet. Si les deux pièces sont du côté pile au bout de n lancers, alors la somme s est égale à 2.

2. Pour tout entier naturel n,on note:

- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = p(X_n)$; $y_n = p(Y_n)$ et $z_n = p(Z_n)$, les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

a. Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

Les deux pièces sont du côté face. Donc X_0 est réalisé, Y_0 et Z_0 ne le sont pas.
On obtient ainsi $x_0 = p(X_0) = 1$, $y_0 = p(Y_0) = 0$ et $z_0 = p(Z_0) = 0$.

b. Justifier que $p_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

$p_{X_n}(X_{n+1})$ est la probabilité conditionnelle de l'évènement X_{n+1} sachant l'évènement X_n, c'est donc la probabilité que l'évènement X_{n+1}: « les deux pièces sont du côté face à l'issue du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer» soit réalisé sachant que l'événement X_n: «les deux pièces sont du côté face à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer » est réalisé.

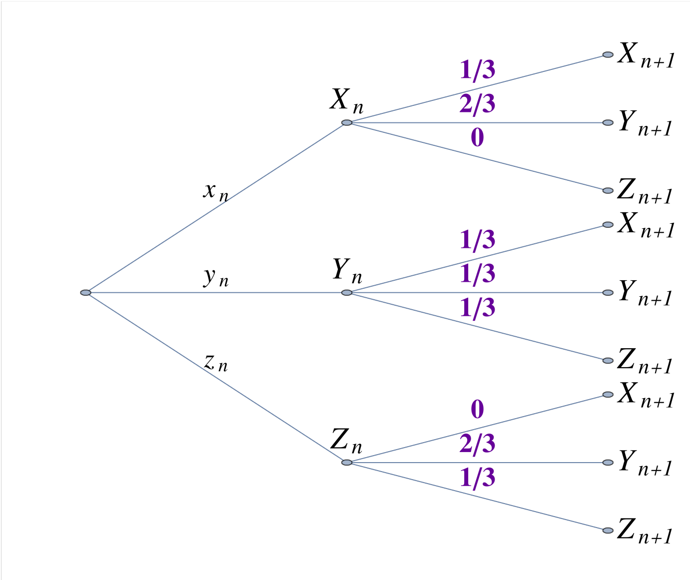
Cela correspond donc à la probabilité que l'on ne retourne aucune des deux pièces.

Cet événement est donc réalisé quand on obtient 5 ou 6 avec le dé donc avec la probabilité $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

REmarquons que dans les autres résultats du dé, une des deux pièces seulement est retournée, et donc le système se retrouve dans l'état « une pièce du côté face et une pièce du côté pile »
Ainsi on en déduit que sachant que X_n est réalisé, Y_{n+1} est réalisé quand on obtient 1, 2, 3 ou 4 avec le dé et Z_{n+1} n'est jamais réalisé.

Par conséquent, $p_{X_n}(Y_{n+1})=\frac{2}{3}$ et $p_{X_n}(Z_n)=0$.

c. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



d. Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

$X_n,\ Y_n,\ Z_n$ forment une partition de l'univers donc $p(X_n)+p(Y_n)+p(Z_n)=1$ d'où $z_n=1-(x_n+y_n)$.

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1}=-\frac{1}{3}y_n+\frac{2}{3}$

Soit n un entier naturel.
On a $y_{n+1}=p(Y_{n+1})$. Alors comme $X_n,\ Y_n,\ Z_n$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on obtient:

$$y_{n+1}=p(Y_n\cap X_{n+1})+p(Y_n\cap Y_{n+1})+p(Y_n\cap Z_{n+1})$$
$$y_{n+1}=p(X_n)\,p_{X_n}(Y_{n+1})+p(Y_n)\,p_{Y_n}(Y_{n+1})+p(Z_n)\,p_{Z_n}(Y_{n+1})$$
$$y_{n+1}=x_n\times\frac{2}{3}+y_n\times\frac{1}{3}+z_n\times\frac{2}{3}$$
$$y_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+\frac{2}{3}(1-(x_n+y_n))$$
$$y_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x_n-\frac{2}{3}y_n$$
$$y_{n+1}=-\frac{1}{3}y_n+\frac{2}{3}$$

f. On pose, pour tout entier naturel n, $b_n=y_n-\frac{1}{2}$. Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

Pour tout entier naturel n, $b_{n+1}=y_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}y_n+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}y_n+\frac{1}{2\times 3}=-\frac{1}{3}\left(y_n-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}b_n$.

Par conséquent, la suite (b_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0=y_0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

La suite (b_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$ donc pour tout entier naturel n,
$b_n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
Or $b_n = y_n - \frac{1}{2}$ donc $y_n = \frac{1}{2} + b_n$ et ainsi $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} y_n$. Interpréter le résultat.

Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ alors on sait que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$.
Par suite, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} y_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}$.
On en déduit qu'après un grand nombre de répétitions du jeu, 1 fois sur 2, les pièces ne présentent pas le même côté.