

Devoir surveillé n°5

Mathématiques, Série S

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter toutes les questions, dans l'ordre qui lui sied, à condition d'indiquer clairement sur la copie le numéro de l'exercice.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Toute trace de recherche, même infructueuse ou incomplète sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Jeudi 25 janvier 2018

Durée: 4 heures

Exercice 1 (5 points)

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A- Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1[$ par :

$f(x) = 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$, où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1[$.
- Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par années)		0,22	0,245	0,25								

- Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.
 - Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
- Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.
- La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
 - Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
 - Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. toutefois, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- Proposition:** Pour tout complexe z , $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re}(z))^2$.
- Proposition:** Le point d'affixe $(-1 + i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
- Proposition:** Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une solution unique.
- Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $a = 2 + 2i$, $b = -\sqrt{3} + i$, $c = 1 + i\sqrt{3}$, $d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $e = -1 + (2 + \sqrt{3})i$.

Proposition: les points A, B et C sont alignés.

- Soit j le nombre complexe tel que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition: $1 + j + \frac{1}{j} = 0$.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction dérivable, définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

- Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 e^x - 1$. Étudier le sens de variation de la fonction g .
- Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Démontrer que α appartient à l'intervalle $[0, 703; 0, 704]$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f .

- Donner les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- On note f' la fonction dérivée de f sur $]0; +\infty[$. Justifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.
- Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice 4 (5 points)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile.

Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

Variables	a, b, d, s sont des entiers i, n des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation	a prend la valeur 0 b prend la valeur 0 Saisir n
Traitement	Pour i allant de 1 à n faire d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6 Si $d \leq 2$ Alors a prend la valeur $1 - a$ Sinon Si $d \leq 4$ Alors b prend la valeur $1 - b$ FinSi FinSi s prend la valeur $a + b$ FinPour
Variables	Afficher s

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.

Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

Variables	i	d	a	b	s
Initialisation					
1^{er} passage boucle pour					
2^e passage boucle pour					
3^e passage boucle pour					

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n , on note :

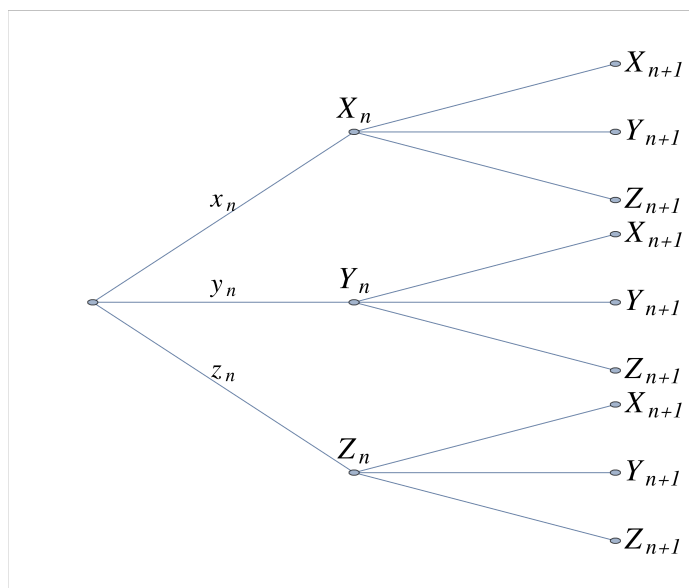
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = p(X_n)$; $y_n = p(Y_n)$ et $z_n = p(Z_n)$, les probabilités respectives des évènements X_n , Y_n et Z_n .

a. Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Justifier que $p_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

c. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



d. Pour tout entier naturel n , exprimer z_n en fonction de x_n et y_n .

e. En déduire que, pour tout entier naturel n , $y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$

f. On pose, pour tout entier naturel n , $b_n = y_n - \frac{1}{2}$.

Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

En déduire que pour tout entier naturel n , $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. Interpréter le résultat.