Devoir surveillé n°6

Éléments de solutions

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}$$

Partie A

1. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f'(x) = \dfrac{e^{1-x}}{\left(1 + e^{1-x}\right)^2}$

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ 1]$.

Pour tout réel $x \in [0; 1]$, comme on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + e^{1-x}$, et comme $u'(x) = -e^{1-x}$ (de la forme $(e^u)' = u'\, e^u$), on obtient donc $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2} = -\dfrac{-e^{1-x}}{\left(1 + e^{1-x}\right)^2} = \dfrac{e^{1-x}}{\left(1 + e^{1-x}\right)^2}$.

On sait que pour tout réel a, $e^a > 0$, ainsi pour tout réel $x \in [0; 1]$, comme $1 - x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$.
De plus un carré est toujours positif, donc on peut en déduire que $f'(x) > 0$.
Par suite la fonction f est croissante.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e}$ (on rappelle que $e = e^1$).

On rappelle que pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^a\, e^b$ et que $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$.

Ainsi pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1-x}} = \dfrac{1}{1 + e^1\, e^{-x}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{e}{e^x}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x + e}{e^x}} = \dfrac{e^x}{e^x + e}$.

3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \ln(2) + 1 - \ln(1 + e)$.

Déterminons une primitive de la fonction f.

On a montré que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e} = \dfrac{v'(x)}{v(x)}$ avec $v(x) = e^x + e$.

Remarquons de plus que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $e^x + e > e > 0$ puisque $e^x > 0$.

Ainsi on sait qu'une primitive de la fonction $f = \dfrac{v'}{v}$ est la fonction F définie par $F(x) = \ln(v(x)) = \ln(e^x + e)$.

On a alors $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = F(x)\Big]_0^1 = \ln\left(e^x + e\right)\Big]_0^1$ d'où

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \ln\left(e^1 + e\right) - \ln\left(e^0 + e\right) = \ln(2\, e) + \ln(1 + e) = \ln(2) + \ln(e) + \ln(1 + e)$ et finalement

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \ln(2) + 1 + \ln(1 + e)$.

Partie B

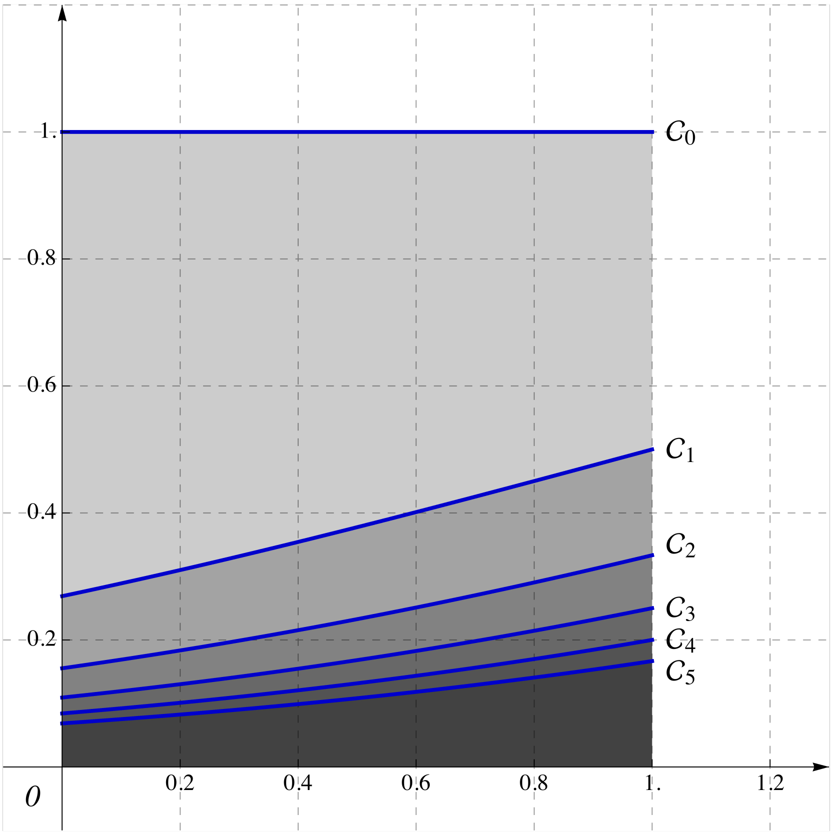
Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; 1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + n\,e^{1-x}}$.

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$

1. On a tracé **en annexe 1 page 3** les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe C_0 représentative de la fonction f_0.

Pour $n = 0$, on a pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f_0(x) = \dfrac{1}{1 + 0 \times e^{1-x}} = \dfrac{1}{1} = 1$: la fonction f_0 est la fonction constante égale à 1. Ainsi C_0 est l'ensemble des points de la droite d'équation $y = 1$, ayant une abscisse dans $[0; 1]$.



|

2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.

On remarque que pour tout entier naturel n, $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + n\,e^{1-x}} > 0$ puisque $e^{1-x} > 0$ et $n \geq 0$.

Ainsi on sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ est égale à l'aire en unités d'aire du domaine du plan, compris entre la courbe C_n de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On a donc $u_0 = 1\ u.a.$

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

On remarque que la courbe C_n est au-dessus de la courbe de C_{n+1} pour $n = 0, 1, 2, 3$ et 4 sur $[0; 1]$.
Par suite l'aire du domaine sous la courbe $C_n$est plus grande que celle du domaine sous la courbe C_{n+1}.
Par conséquent on conjecture que $u_n \geq u_{n+1}$ c'est à dire que la suite (u_n) est croissante.

Soit n un entier naturel.
Alors comme $n < n+1$ et comme pour tout réel $x \in [0; 1]$, $e^{1-x} > 0$, alors pour tout réel $x \in [0; 1]$,
$n\,e^{1-x} < (n+1)\,e^{1-x}$ d'où $0 < 1 + n\,e^{1-x} < 1 + (n+1)\,e^{1-x}$ et donc $\dfrac{1}{1 + n\,e^{1-x}} > \dfrac{1}{1 + (n+1)\,e^{1-x}}$ c'est à dire

$f_n(x) > f_{n+1}(x)$.

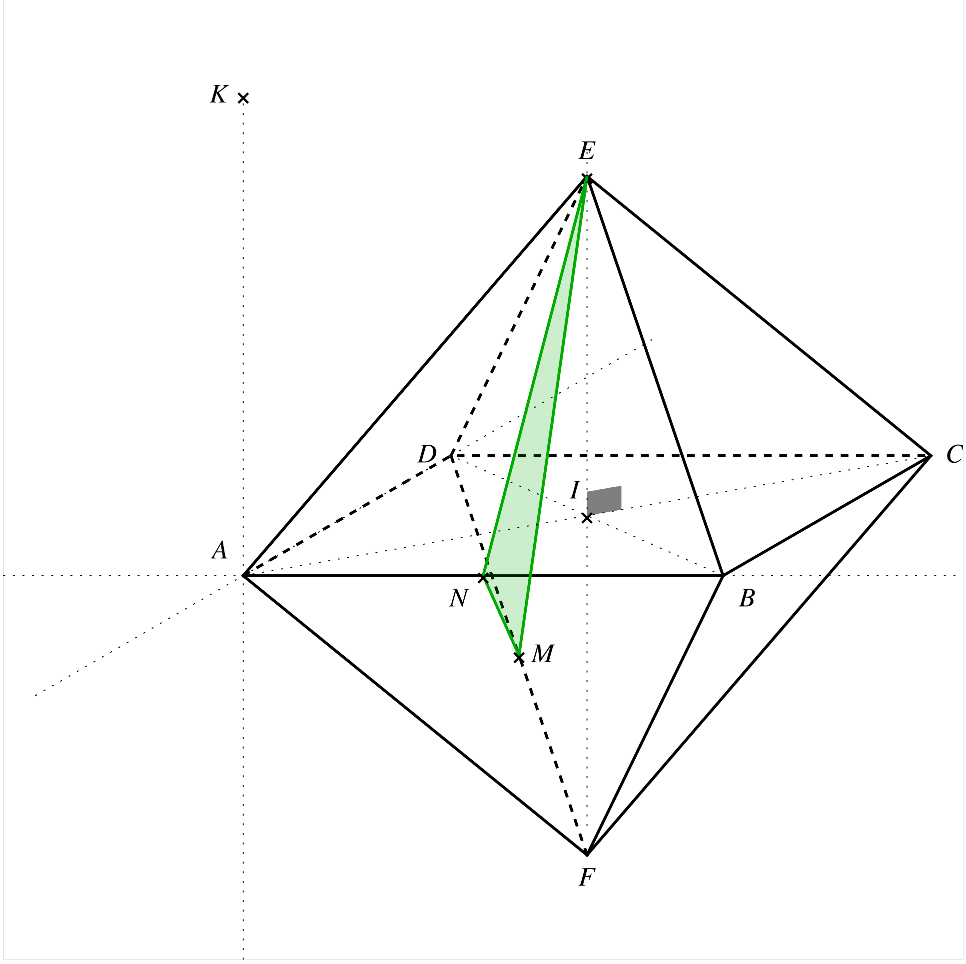
On en déduit donc $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx$ et finalement $u_n > u_{n+1}$: la suite (u_n) est donc décroissante.

4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ puisque $f_n(x) \geq 0$ pour tout réel $x \in [0; 1]$. La suite (u_n) est donc minorée par 0.
On a démontré à la question précédente que la suite (u_n) est décroissante.
D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) admet donc une limite.

Exercice 2

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I . Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous. Toutes les arêtes sont de longueur 1.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AK}\right)$.

1. a. Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I , E et F.

Le triangle AIB est rectangle isocèle en I puisque I est le centre du carré $ABCD$.

D'après le théorème de Pythagore, on obtient $AB^2 = AI^2 + IB^2$.

Ainsi comme $AI = IB$, $2AI^2 = 1^2$ d'où $AI^2 = \dfrac{1}{2}$ et donc $AI = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Le triangle IEA est rectangle en I.
D'après le théorème de Pythagore, on a donc $AE^2 = AI^2 + IE^2$.

Donc $IE^2 = AE^2 - IE^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ d'où $IE^2 = \frac{1}{2}$ et ainsi $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a:

- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$: les coordonnées de I sont $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$;
- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AK}$: les coordonnées de E sont $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AK}$: les coordonnées de E sont $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont deux vecteurs colinéaires du plan (ABE).
On a de plus:

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\times 1 + (-2)\times 0 + \sqrt{2}\times 0 = 0$
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AE} = 0\times\frac{1}{2} + (-2)\times\frac{1}{2} + \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 - 1 + 1 = 0.$

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$. Il est donc normal au plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.

a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles. *On pourra utiliser le vecteur* $\overrightarrow{n}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont deux vecteurs colinéaires du plan (FDC).
On a de plus:

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DC} = 0\times 1 + (-2)\times 0 + \sqrt{2}\times 0 = 0$
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DF} = 0\times\frac{1}{2} + (-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 + 1 - 1 = 0.$

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DF}$. Il est donc normal au plan (FDC).

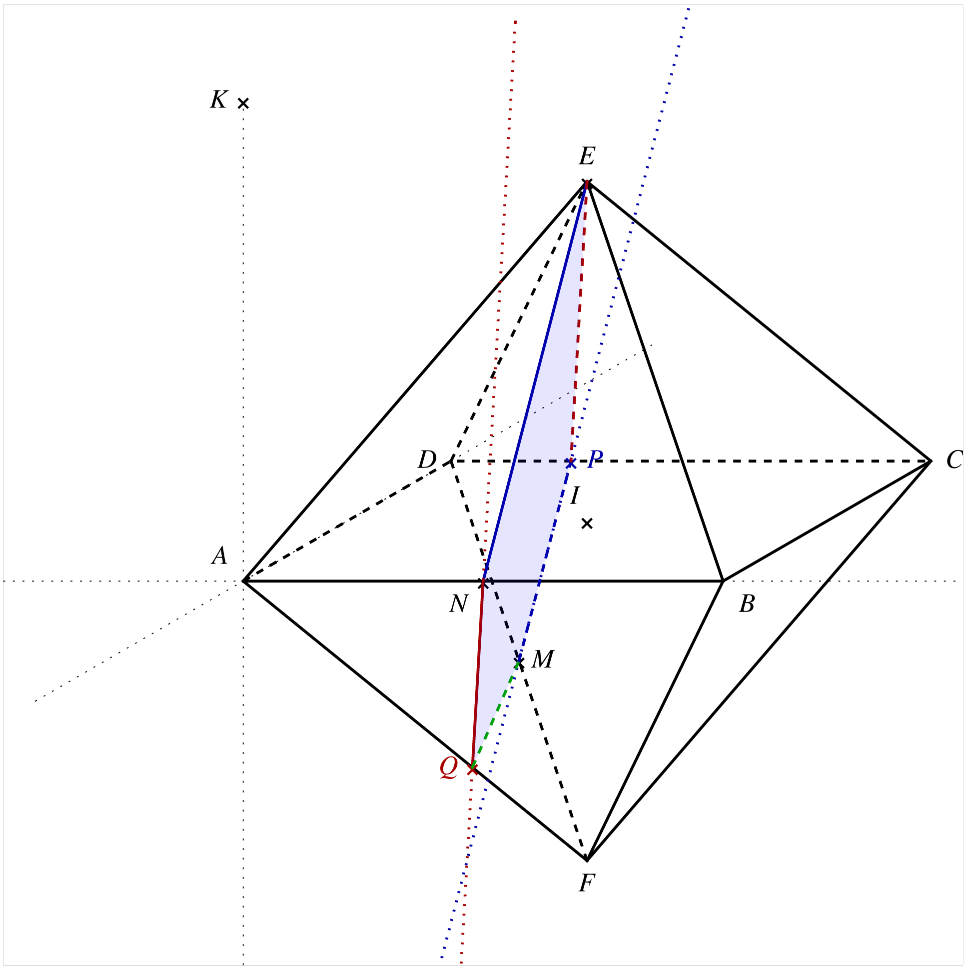
Les plans (FDC) et (ABE) admettent $\overrightarrow{n}$ pour vecteurs normal. Ils sont donc parallèles.

b. Préciser l'intersection des plans (ABE) et (EMN). Déterminer alors l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

L'intersection des plans (EMN) et (ABE) est la droite (EN) puisque $N \in [AB]$.
Alors comme les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles, on sait que la droite d'intersection des plans (FDC) et (EMN) est parallèle à la droite (EN).
De plus $M \in [DF]$ donc la droite d'intersection des deux plans est la parallèle à la droite (EN) passant par M.

c. Construire sur l'**annexe 2 page 4 (à rendre avec la copie)** la section du solide *ADECBF* par le plan (EMN).

On sait déjà que l'intersection du plan (EMN) avec la face (ABE) est le segment $[EN]$.
On construit la parallèle à (EN) passant par M. Elle intersecte l'arête $[DC]$ en P: le segment $[MP]$ est l'intersection du plan (EMN) avec la face (FDC).
Alors comme E et P sont des points du plan (EMN) et de la face (EDC), on en déduit que l'intersection du plan (EMN) avec la face (EDC) est le segment $[PE]$.
Enfin comme les plans (EDC) et (FAB) sont parallèles, on en déduit que la droite d'intersection des plans (EMN) et (FAB) est la parallèle à la droite (MP) passant par N.
On note Q le point d'intersection de cette parallèle avec l'arête $[AF]$.
L'intersection du plan (EMN) avec la face (FAB) est le segment $[NQ]$.
On complète la section par le segment $[MQ]$, intersection du plan (EMN) avec la face (ADF).



La section est le pentagone *EPMQN*.