Devoir surveillé n°6

Mathématiques, Série S

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Le candidat doit traiter toutes les questions, dans l'ordre qui lui sied, à condition d'indiquer clairement sur la copie le numéro de l'exercice.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Toute trace de recherche, même infructueuse ou incomplète sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Vendredi 23 mars 2018

Exercice 1 (12 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}$$

Partie A

1. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f'(x) = \dfrac{e^{1-x}}{\left(1 + e^{1-x}\right)^2}$

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ 1]$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e}$ (on rappelle que $e = e^1$).

3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \ln(2) + 1 - \ln(1 + e)$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; 1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + n\,e^{1-x}}$.

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$

1. On a tracé **en annexe 1 page 3** les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe C_0 représentative de la fonction f_0.

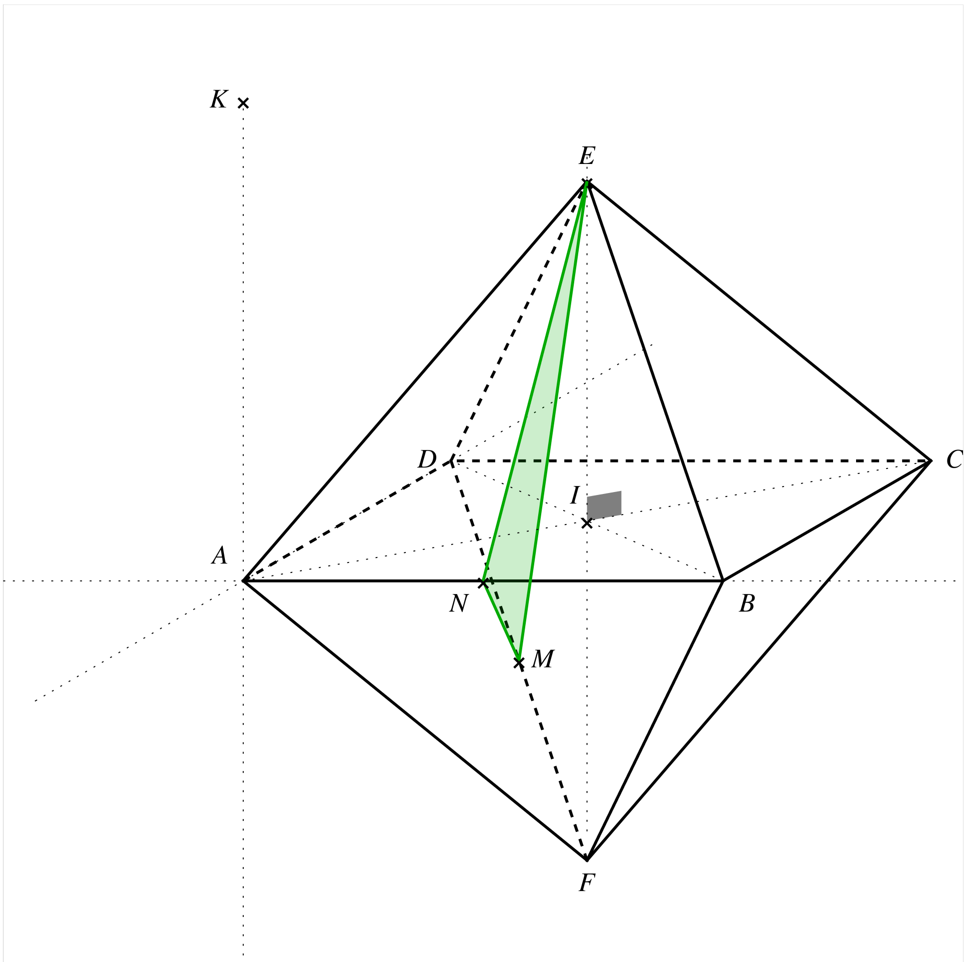
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Exercice 2 (8 points)

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous. Toutes les arêtes sont de longueur 1.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AK}\right)$.

1. a. Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.

a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles. *On pourra utiliser le vecteur* $\overrightarrow{n}$.

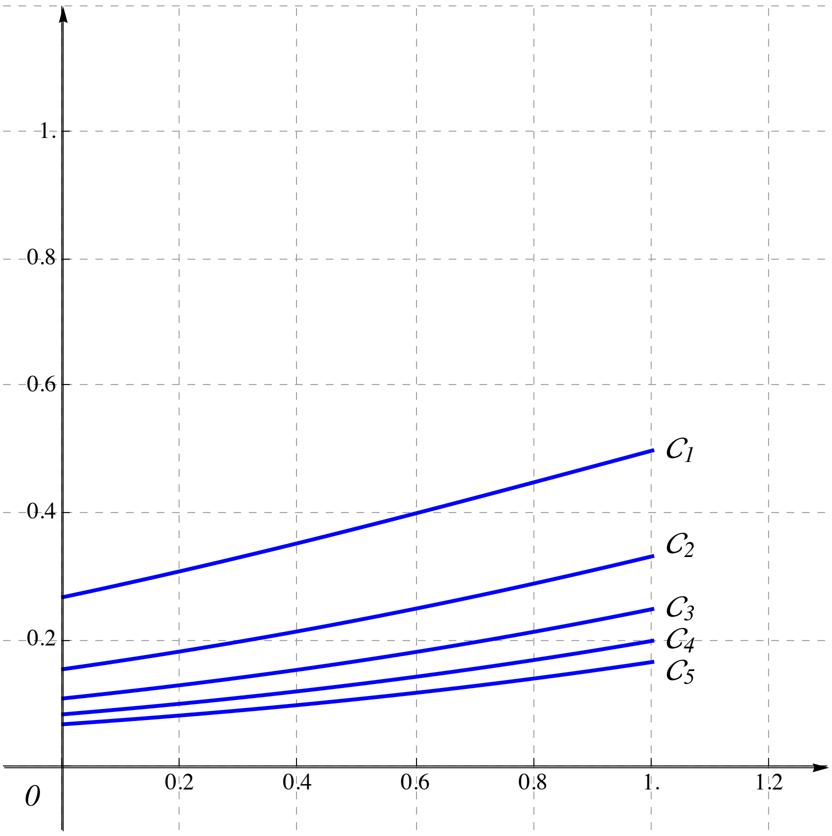
b. Préciser l'intersection des plans (ABE) et (EMN). Déterminer alors l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

c. Construire sur l'**annexe 2 page 4 (à rendre avec la copie)** la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN).

Annexes (à rendre avec la copie)

Nom: .... Prénom: ....

Annexe 1, Exercice 1:



Annexe 2, Exercice 2: