Baccalauréat

Mathématiques, Série S

Éléments de solutions

Exercice 1. (5 pts)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z: $(z-4)\left(\overline{z}-4+4\,i\right)\left(z^2-2\,z+5\right)=0$ [1].

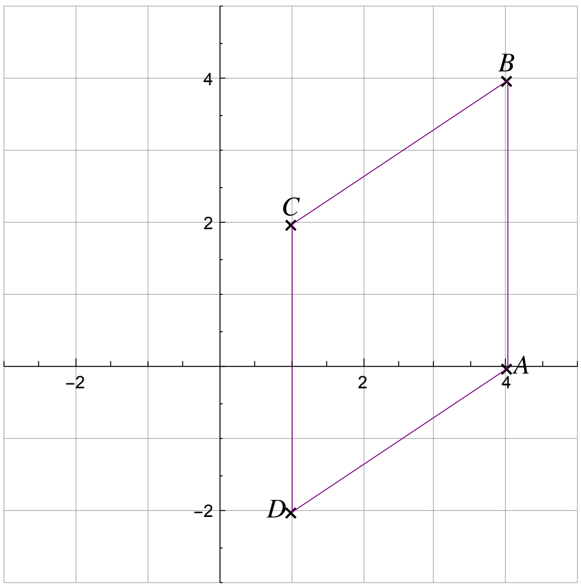
On reconnaît une équation produit nul.
Ainsi z est solution de [1] si et seulement si $z-4=0$ ou $\overline{z}-4+4\,i=0$ ou $z^2-2\,z+5=0$.
On obtient:

- $z-4=0 \Longleftrightarrow z=4$: 4 est solution de [1];
- $\overline{z}-4+4\,i=0 \Longleftrightarrow \overline{z}=4-4\,i \Leftrightarrow z=4+4\,i$: $4+4\,i$ est solution de [1];
- $z^2-2\,z+5=0$ est une équation du second degré à coefficients réels.
  Son discriminant est $\Delta=(-2)^2-4\times1\times5=4-20=-16<0$.
  On sait donc que cette équation du second degré admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1=\frac{-(-2)-i\sqrt{-(-16)}}{2\times1}=\frac{2-4\,i}{2}=1-2\,i \text{ et } z_2=1+2\,i.$$

Finalement l'équation [1] admet 4 solutions: 4, $4+4\,i$, $1-2\,i$ et $1+2\,i$.

2. Représenter les points dont les affixes sont solutions de l'équation [1] dans le plan complexe.



3. Quelle est la nature du quadrilatère obtenu ? Justifier.

On note A, B, C, D les points du plan d'affixes respectives $a=4$, $b=4+4\,i$, $c=1+2\,i$, $d=1-2\,i$.
On a $\dfrac{c-d}{b-a}=\dfrac{(1+2\,i)-(1-2\,i)}{(4+4\,i)-4}=\dfrac{4\,i}{4\,i}=1$.

Par suite on en déduit que $\dfrac{z_{\overrightarrow{DC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}=1\in\mathbb{R}$.

Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$: le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Partie B

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe z' définie par $z' = \dfrac{z^2+1}{z}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{u};\ \vec{v}\right)$, on note M le point d'affixe z.

1. **a.** Représenter les points d'affixes i; $1+i$ et leurs images par f.

On détermine les images de i et $1+i$:

- $f(i) = \dfrac{i^2+1}{i} = \dfrac{-1+1}{i} = 0$ donc l'image du point A d'affixe i par f est O origine du repère.
- $f(1+i) = \dfrac{(1+i)^2+1}{(1+i)}$

$f(1+i) = \dfrac{(1-1+2i)+1}{1+i}$

$f(1+i) = \dfrac{(1+2i)(1-i)}{1^2+(-1)^2}$

$f(1+i) = \dfrac{\left(1\times 1-2i^2\right)+i(-1+2)}{2}$

$f(1+i) = \dfrac{3+i}{2}$

$f(1+i) = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i.$

b. Représenter les points d'affixe z tels que $f(z) = 1$.

On détermine le ou les antécédents de 1 par f. On résout donc l'équation $f(z) = 1$ c'est à dire l'équation $\dfrac{z^2+1}{z} = 1$.

On obtient:

$$\frac{z^2+1}{z} - 1 = 0$$

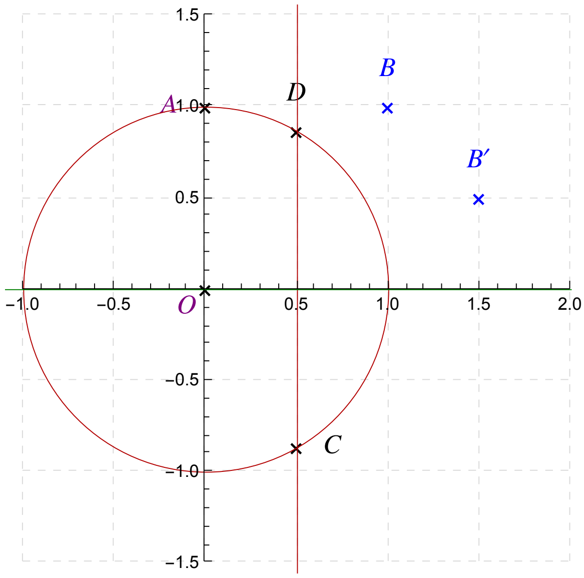
$$\frac{z^2-z+1}{z} = 0$$

Donc pour $z \neq 0$, cela revient à résoudre l'équation du second degré $z^2 - z + 1 = 0$
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times 1 = -3 < 0$.
On sait donc que cette équation admet 2 solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-(-1)-i\sqrt{-(-3)}}{2\times 1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On note A, B, C et D les points d'affixes respectives $a = i$, $b = 1+i$, $z_1 = \dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On note $A' = O$, B', I leurs images par f. Ainsi B' a pour affixe $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et I a pour affixe 1.



2. On note $z = x + i\,y$ avec x et y réels.

a. Calculer en fonction de x et de y les parties réelle et imaginaires de $f(z)$.

On obtient:

$$f(z) = \frac{(x+i\,y)^2+1}{x+i\,y}$$

$$f(z) = \frac{\left(x^2-y^2+1\right)+2\,i\,x\,y}{x+i\,y}$$

$$f(z) = \frac{\left(\left(x^2-y^2+1\right)+2\,i\,x\,y\right)(x-i\,y)}{x^2+y^2}$$

$$f(z) = \frac{\left[x\left(x^2-y^2+1\right)+2\,i\,x\,y\times(-i\,y)\right]+i\left[\left(x^2-y^2+1\right)(-y)+x\times 2\,x\,y\right]}{x^2+y^2}$$

$$f(z) = \frac{x\left(x^2-y^2+1+2\,y^2\right)+i\,y\left(-x^2+y^2-1+2\,x^2\right)}{x^2+y^2}$$

$$f(z) = \frac{x\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2}+i\,\frac{y\left(x^2+y^2-1\right)}{x^2+y^2}$$

b. Déterminer, puis représenter l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants:

i. $f(z)$ est réel ;

Le nombre $f(z)$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Il faut donc $\dfrac{y\left(x^2+y^2-1\right)}{x^2+y^2} = 0$.

Alors comme $(x;y) \neq (0;0)$, il faut $y\left(x^2+y^2-1\right) = 0$.

D'où $y = 0$ ou $(x-0)^2+(y-0)^2 = 1^2$.

Donc les points M d'affixe $z = x + i\,y$ tels que $f(z)$ soit réel sont les points de l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = 0$ ou les points du cercle unité de centre O et de rayon 1, d'équation $x^2+y^2 = 1$.

ii. $f(z)$ est imaginaire pur.

Le nombre $f(z)$ est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Il faut donc $\dfrac{x\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2} = 0$.

Alors comme $(x;y) \neq (0;0)$, il faut $x\left(x^2+y^2+1\right) = 0$.

D'où $x = 0$ ou $x^2+y^2+1 = 0$.

Or pour tous réels x et y, $x^2+y^2+1 \geq 1 > 0$ donc il reste $x = 0$.

Donc les points M d'affixe $z = x + i\,y$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur sont les points de l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 0$.

Exercice 2. (4 pts)

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leurs pratiques du tri sélectif.
L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif. Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif.

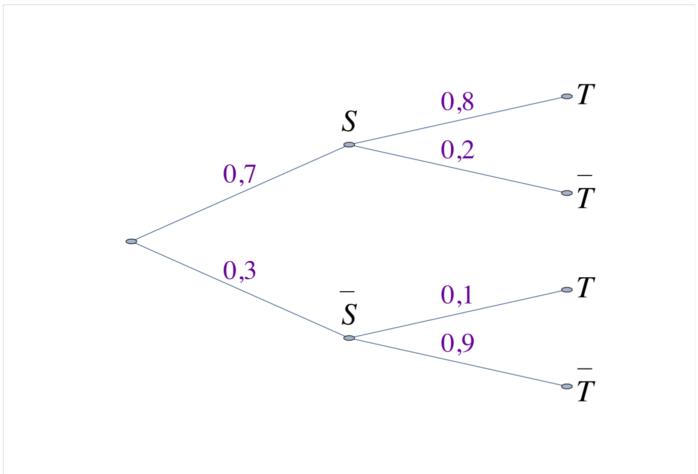
On interroge un élève au hasard dans le lycée. On considère les événements suivants :

- S : « L'élève interrogé est sensible au développement durable » ;
- T : « L'élève interrogé pratique le tri sélectif ».

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} .

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

On sait que 70% des élèves sont sensibles au développement durable donc $p(S) = 0,7$ et $p\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,7 = 0,3$
On sait aussi que 80% des élèves sensibles au développement durable pratiquent le tri sélectif donc $p_S(T) = 0,8$ d'où $p_S\left(\overline{T}\right) = 1 - 0,8 = 0,2$.
De même 10% des élèves qui ne sont pas sensibles au développement durable pratiquent le tri sélectif donc $p_{\overline{S}}(T) = 0,1$ et $p_{\overline{S}}\left(\overline{T}\right) = 1 - 0,1 = 0,9$.
On obtient l'arbre de probabilités:



2. Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.

On demande $p(S \cap T)$. On a:
$$p(S \cap T) = p(S)\, p_S(T) = 0,7 \times 0,8 = 0,56.$$

3. Montrer que la probabilité $p(T)$ est égale à 0, 59.

Les événements S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers D'après la formule des probabilités totales, on obtient:
$$p(T) = p(T \cap S) + p\left(T \cap \overline{S}\right)$$
$$p(T) = 0,56 + p\left(\overline{S}\right) p_{\overline{S}}(T)$$
$$p(T) = 0,56 + 0,3 \times 0,1$$
$$p(T) = 0,59$$

4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif. Peut-on affirmer que les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont inférieures à 10 % ?

On sait que l'élève ne pratique pas le tri sélectif. $\overline{T}$ est donc réalisé.
On calcule donc $p_{\overline{T}}(S)$.

On a $p_{\overline{T}}(S) = \dfrac{p\left(\overline{T} \cap S\right)}{p\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{p(S)\,p_S\left(\overline{T}\right)}{1 - p(T)} = \dfrac{0,7 \times 0,2}{1 - 0,59} = \dfrac{14}{59} \approx 0,24 > 0,10.$

Par suite, les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont supérieures à 10%.

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les quatre élèves interrogés. La taille de ce lycée permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier. Préciser ses paramètres.

L'expérience aléatoire qui consiste à choisir un élève qui pratique le tri sélectif parmi les élèves de l'établissement est une expérience aléatoire à deux issues dont le paramètre de succès «l'élève pratique le tri sélectif» est
$p = p(T) = 0,59$.
On sait que le tirage de 4 élèves peut être assimiler à un tirage avec remise.
Par suite l'expérience aléatoire qui consiste à choisir 4 élèves pratiquant le tri sélectif parmi les élèves du lycée est la répétition de 4 expériences aléatoires à 2 issues indépendantes et identiques.
C'est donc un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $p = 0,59$.
Par suite la variable aléatoire X qui dénombre parmi les 4 élèves choisis ceux qui pratiquent le tri sélectif, à valeurs dans $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ suit la loi binomiale de paramètres 4 et 0,59.

b. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne pratique le tri sélectif.

L'événement « aucun des 4 élèves interrogés ne pratiquent le tri sélectif » est l'événement $(X = 0)$. On a:

$p(X = 0) = (1 - 0,59)^4 = 0,41^4 \approx 0,028$ d'où $p(X = 0) = 0,03$ arrondi à 10^{-2} près.

c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des quatre élèves interrogés pratiquent le tri sélectif.

L'événement « au moins deux des quatre élèves interrogés pratiquent le tri sélectif » est l'événement $(X \geq 2)$. On a:

$p(X \geq 2) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1))$

$p(X \geq 2) = 1 - \left(0,41^4 + 4 \times 0,59 \times 0,41^3\right)$

$p(X \geq 2) = 0,81$ arrondi à 10^{-2}.

Remarque: on peut aussi calculer $p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4)$.

d. Combien peut-on espérer obtenir d'élèves pratiquant le tri sélectif dans un échantillon de 200 élèves ?

On interroge 200 élèves. On admet que les conditions d'indépendances sont toujours respectées.
Alors l'expérience revient à la répétition de 200 expériences aléatoires à 2 issues indépendantes et identiques.
La variable aléatoire qui dénombre le nombre d'élèves parmi les 200 interrogés qui pratiquent le tri sélectif suit alors la loi binomiale de paramètres 200 et 0,59.
Son espérance est $E(Y) = 200 \times 0,59 = 118$.
On peut espérer obtenir 118 élèves qui pratiquent le tri sélectif.

Exercice 3. (5 pts)

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1. Avec le parachute qui s'ouvre

On suppose, dans cette partie, que le parachute fonctionne correctement.

Soit v_1 la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $v_1(t) = 5 \times \dfrac{e^{0,3t} - 1}{e^{0,3t} + 1}$.

1. **a.** Déterminer la limite de $v_1(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Pour tout réel t, $e^{0,3t} > 0$, et on a donc $v_1(t) = 5 \times \dfrac{e^{0,3t}\left(1 - \dfrac{1}{e^{0,3t}}\right)}{e^{0,3t}\left(1 + \dfrac{1}{e^{0,3t}}\right)} = 5 \times \dfrac{1 - e^{-0,3t}}{1 + e^{-0,3t}}$.

Alors comme $\lim\limits_{t \to +\infty} -0,3t = -\infty$ et comme $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{0,3t} = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} 1 - e^{-0,3\,t} = 1$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} 1 + e^{-0,3\,t} = 1 \neq 0$.

Finalement par quotient, $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{1 - e^{-0,3\,t}}{1 + e^{0,3\,t}} = 1$ et donc $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} v_1(t) = 5$.

b. Déterminer en justifiant, le sens de variation de la fonction v_1.

La fonction v_1 est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$.

Pour tout réel $t \geq 0$, on a $v_1{}'(t) = 5 \times \dfrac{0,3\,e^{0,3\,t}\left(e^{0,3\,t}+1\right) - 0,3\,e^{0,3\,t}\left(e^{0,3\,t}-1\right)}{\left(e^{0,3\,t}+1\right)^2} = \dfrac{3\,e^{0,3\,t}}{\left(e^{0,3\,t}+1\right)^2}$.

Or un carré est positif et pour tout réel a, $e^a > 0$ donc pour tout réel t, $\left(e^{0,3\,t}+1\right)^2 > 0$ et $e^{0,3\,t} > 0$.
Finalement, $v_1{}'(t) > 0$.
La fonction v_1 est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. On admet que, t secondes après qu'il a été lâché et tant qu'il n'a pas atteint le sol, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale à $v_1(t)$.
On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.
Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

La fonction v_1 est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, $v_1(t) \leq \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} v_1(t)$.

On a montré que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} v_1(x) = 5$.

Par suite, pour tout réel $t \geq 0$, $v_1(t) \leq 5 < 6$.
Le colis arrivera avec une vitesse inférieure à 5 m.s^{-1} quelle que soit la hauteur du largage, donc en bon état sur le sol.

Partie 2. Avec le parachute qui ne s'ouvre pas

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne, le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par: $v_2(t) = 32,7\left(1 - e^{-0,3\,t}\right)$.

On admet que la fonction v_2 est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

1. **a.** Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s^{-1}.

On a $v_2(10) = 32,7\left(1 - e^{-0,3\times 10}\right) = 32,7\left(1 - e^{-3}\right) \approx 32,0719$ donc la vitesse du colis au bout de 10 secondes de chute est de 32,1 m.s^{-1} à 0,1 m.s^{-1} près.

b. Quelle est la valeur limite de v_2?

On a montré que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \left(1 - e^{-0,3\,t}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} v_2(t) = 32,7$.

Ainsi au bout d'un temps suffisamment long de chute, le colis a une vitesse avoisinant les 32,7 m.s^{-1}.

2. On propose l'algorithme suivant:

Variables	V et T sont des nombres réels
Initialisation	T prend la valeur 0 V prend la valeur ………
Traitement	Tant que V ………… 30 $T \longleftarrow$ T …………… 0,1 V $\longleftarrow$ 32,7 ($1 - e^{-0,3\,T}$) Fin Tant que
Sortie	Afficher ………………

a. On admet que l'équation $v_2(t) = 30$ admet une unique solution positive notée α.
Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche une valeur approchée à 10^{-1} près de α, solution de l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}.

Variables	V et T sont des nombres réels
Initialisation	T prend la valeur 0
	V prend la valeur **0**
Traitement	Tant que V **… < …** 30
	$T \longleftarrow$ T **… + …** 0,1
	$V \longleftarrow 32{,}7\,(1 - e^{-0{,}3\,T})$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher **… T …**

Remarque: on peut choisir plusieurs valeurs pour initialiser V. Toute valeur telle que $f(V) < 30$.
En initialisant à 0, le programme prend plus de temps …

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1}.

On a:
- $v_2(8,3) \approx 29,989 < 30$ et $v_2(8,4) \approx 30,069 > 30$ donc $8,3 < \alpha < 8,4$.
- $v_2(8,31) \approx 29,997 < 30$ et $v_2(8,32) \approx 30,005 > 30$ donc $8,31 < \alpha < 8,32$.

Une valeur approchée à 10^{-1} près de α est donc 8,3.

3. On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis t secondes après que le colis a été lâché par le passager est donnée, pour tout $t \in [0; +\infty[$, par: $d(t) = 109\left(e^{-0,3\,t} + 0,3\,t - 1\right)$.

a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $d'(t) = v_2(t)$.

Pour tout réel $t \geq 0$, $d'(t) = 109\left(-0,3\,e^{-0,3\,t} + 0,3\right) = 109 \times 0,3 \times \left(1 - e^{-0,3\,t}\right) = 32,7\left(1 - e^{-0,3\,t}\right) = v_2(t)$.

b. On sait que la chute du colis dure 20 secondes. Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la hauteur à laquelle il a été lâché par l'hélicoptère.

$d(20) = 109\left(e^{-0,3\times 20} + 0,3 \times 20 - 1\right) = 109\left(5 + e^{-6}\right) \approx 545,27$ m donc le colis a été lâché d'une hauteur de 545 m à 1 m près.

4. **a.** Démontrer que l'équation $d(t) = 700$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

On a montré que $d'(t) = v_2(t) > 0$ pour tout réel $t \geq 0$, avant de toucher le sol, (c'est une vitesse de chute …) donc d est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Remarquons alors de plus $d(0) = 0$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(e^{-0,3\,t} + 0,3\,t - 1\right) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} d(t) = +\infty$.

Finalement la fonction d est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $[0; +\infty[$.
Comme $700 \in [0; +\infty[$, alors l'équation $d(t) = 700$ admet une unique solution T sur $[0; +\infty[$.

b. Déterminer alors un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

On détermine la solution T de l'équation de la question précédente.
On obtient:
- $d(24) \approx 675,88 < 700$ et $d(25) \approx 708,56 > 700$ donc $24 < T < 25$;
- $d(24,7) \approx 698,76 < 700$ et $d(24,8) \approx 702,02 > 700$ donc $24,7 < T < 24,8$.

Le colis mettra alors entre 24,7 et 24,8 secondes pour atteindre le sol.

Exercice 4. (5 pts)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016.
Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A: un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$.
On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.

La population croît de 5% par an. Donc on a $v_{n+1} = \left(1 + \dfrac{5}{100}\right) v_n = 1,05\, v_n$.
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $1,05$ et de premier terme $v_0 = 12$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $v_n = 12 \times (1,05)^n$.

2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

On a $1,05 > 1$ et $v_0 = 12 > 0$ la suite (v_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
Par conséquent au bout d'un certain nombre d'années le nombre d'individus dépassent les $60\,000$.
Ce modèle ne répond pas aux contraintes.

Partie B: un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605} u_n^2 + 1,1\, u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1,1}{605} x^2 + 1,1\, x$.

a. Justifier que g est croissante sur $[0; 60]$.

La fonction g est une fonction du second degré dont le coefficient dominant des x^2 est $-\dfrac{1,1}{605} < 0$.

Alors on sait que cette fonction est croissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{1,1}{2 \times \dfrac{1,1}{605}}\right] = \left]-\infty\,;\ 302,5\right]$ et décroissante sur $[302,5\,;\ +\infty[$.
Donc, en particulier, g est croissante sur $[0; 60]$.

Remarque:

On peut aussi calculer $g'(x) = -\dfrac{2,2}{605} x + 1,1$ et étudier son signe.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

On résout $-\dfrac{1,1}{605} x^2 + 1,1\, x = x$ d'où $-\dfrac{1,1}{605} x^2 + 0,1\, x = 0$ et donc $x\left(-\dfrac{1,1}{605} x + 0,1\right) = 0$

Il vient $x = 0$ ou $x = \dfrac{-0,1}{-\dfrac{1,1}{605}} = \dfrac{60,5}{1,1} = 55$.
L'équation $g(x) = x$ admet donc 2 solutions: 0 et 55.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1 Interpréter.

On a $u_1 = -\dfrac{1,1}{605} 12^2 + 1,1 \times 12 \approx 12,9381$ donc $u_1 = 12,938$ à 10^{-1} près.
Le biologiste prévoit 12938 individus en 2017.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le 55$.

On définit pour n entier naturel la proposition $\mathcal{P}(n)$: $0 \le u_n \le 55$.

On a $u_0 = 12$ donc $0 \le u_0 \le 55$: la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit n un entier naturel.
On fait l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi on sait que $0 \le u_n \le 55$.

On remarque que $u_{n+1} = g(u_n)$.
Alors comme g est croissante sur $[0; +\infty[$ et comme par hypothèse de récurrence $0 \le u_n \le 55 < 60$, on obtient:

$g(0) \leq g(u_n) \leq g(55)$
$0 \leq u_{n+1} \leq 55$
En effet $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Soit n un entier naturel, alors:

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$$
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1,1}{605} u_n{}^2 + 0,1\,u_n.$$
$$u_{n+1} - u_n = -u_n\left(\frac{1,1}{605} u_n - 0,1\right)$$

Alors comme $0 \leq u_n \leq 55$, on obtient $-u_n \leq 0$ et $-0,1 \leq \frac{1,1}{605} u_n - 0,1 \leq 0 \left(= \frac{1.1}{605} \times 55 - 0.1 \right)$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n).

La suite (u_n) est majorée par 55 d'après la question **B.2.b.**
La suite (u_n) est croissante d'après la question **B.2.c.**
D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est donc convergente.

e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

D'après la question **B.1.b.**, on sait que les solutions de l'équation $g(x) = x$ sont 0 et 55.
Or la suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc $u_n \geq 12$ pour tout entier $n \geq 0$.
On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq 12$.
Finalement $\ell = 55$.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant:

Variables	n un entier naturel u est un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant que** .... u prend la valeur .... n prend la valeur .... **Fin Tant que**
Sortie	Afficher ....

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier n tel que $u_n \geq 50$.

Variables	n un entier naturel u est un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant que** $\boldsymbol{u \leq 50}$ u prend la valeur $\boldsymbol{-\frac{1.1}{605} * u^2 + 0{,}1\,u}$ n prend la valeur $\boldsymbol{n+1}$ **Fin Tant que**
Sortie	Afficher $\boldsymbol{n}$

4. Déterminer l'année à partir de laquelle la population dépassera 50 000 individus.

On obtient $n = 36$ avec $u_{36} \approx 50,36 \geq 50$ et $u_{35} \approx 49,79 < 50$.